Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
30 de Octubre de 2009

Ayudantía N$^{\underline{\text{o}}}$ 3 - Análisis de Señales
REPASO I3

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

Transformada de Fourier Inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

Propiedad	Señal Aperiódica	Transformada de Fourier
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Escalado	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega} X(\omega)$
Relación de Parseval		

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Tabla 2: Propiedades de la Transformada de Fourier

Señal	**Transformada de Fourier**	**Coef. serie de Fourier (si es periódica)**
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_o)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0 \quad k \neq 1$
$\cos\omega_0 t$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0,$ con otro valor
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0,$ con otro valor
1	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1$ $a_k = 0 \quad k \neq 0$
Onda cuadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ para todo k
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$	-
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	-
$\delta(t)$	1	-
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	-
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	-
$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	-
$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	-
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	-

Tabla 1: Pares Básicos de Transformadas de Fourier

Ejercicios

1. **Transformadas.** Calcule las Transformadas de Fourier de las siguientes señales:

a) $f(x) = \frac{\jmath}{x}$

b) $g(x) = \cos^2(\omega_0 t)$

Solución

a) Tenemos:

$$f(x) = \frac{\jmath}{x} = -\frac{1}{\jmath x} = -\frac{1}{2}\frac{2}{\jmath x}$$

Ahora pasamos a frecuencia:

$$X(t) \to 2\pi x(-\omega)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{2}{\jmath x} \to 2\pi(-\frac{1}{2})\mathrm{sgn}(-\omega)$$

Finalmente tenemos:

$$F(\omega) = \pi \mathrm{sgn}(\omega)$$

b) Sabemos que:

$$g(x) = \cos^2(\omega_0 t) = \frac{\cos(2\omega_0 t) + 1}{2}$$

Por lo tanto:

$$G(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)] + \pi\delta(\omega)$$

2. **Cálculo de Integrales.** Resuelva la siguiente integral ocupando la Transformada de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16}{(\omega^2 - 6\omega + 13)^2} d\omega$$

Solución

Escribimos la integral de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16}{(2^2 + (\omega - 3)^2)^2} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{4}{2^2 + (\omega - 3)^2}|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{4}{2^2 + \omega^2}|^2 d\omega$$

Ahora, ocupamos el Teorema de Parseval:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2|x|}|^2 dx = 4\pi \int_{0}^{\infty} e^{-4x} dx = \pi$$

3. **Propiedades de la Transformada de Fourier.** Una señal $x(t)$ tiene la siguiente Transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \frac{\jmath\omega}{\omega^2 - 3\jmath\omega - 2}$$

Escriba la transformada de cada una de las señales:

a)$x(2t + 1)$

b)$e^{-\jmath 2t} x(t + 1)$

c)$\frac{dx(t)}{dt}$

d)$x(\frac{-t}{3})$

e)$x(t)\cos(t)$

f)$x(t) * x(t - 1)$

Solución

a) Sabemos que:

$$x(t) \rightarrow X(\omega)$$

Ocupando la propiedad de escalamiento:

$$x(2t) \rightarrow \frac{1}{|2|}X(\frac{\omega}{2})$$

Ahora, la propiedad de desplazamiento:

$$x(2(t-(-\frac{1}{2}))) \rightarrow \frac{1}{|2|}X(\frac{\omega}{2})e^{\frac{\jmath\omega}{2}}$$

Finalmente, tenemos que la tranformada es:

$$\mathcal{F}\{x(2t+1)\} = \frac{1}{2}\frac{\jmath(\frac{\omega}{2})}{(\frac{\omega}{2})^2 - 3\jmath(\frac{\omega}{2}) - 2}e^{\frac{\jmath\omega}{2}} = \frac{\jmath\omega e^{\frac{\jmath\omega}{2}}}{\omega^2 - 6\jmath\omega - 8}$$

b) Ocupamos la propiedad de desplazamiento(tiempo/espacio y frecuencia):

$$x(t+1) \rightarrow X(\omega)e^{\jmath\omega}$$

$$e^{-\jmath 2t}x(t+1) \rightarrow 2\pi X(\omega+2)e^{\jmath(\omega+2)}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{F}\{e^{-\jmath 2t}x(t+1)\} = 2\pi\frac{\jmath(\omega+2)}{(\omega+2)^2 - 3\jmath(\omega+2) - 2}e^{\jmath(\omega+2)}$$

c) Ocupamos la propiedad de derivada:

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow (\jmath\omega)X(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{\frac{dx(t)}{dt}\} = \frac{-\omega^2}{\omega^2 - 3\jmath\omega - 2}$$

d) Nuevamente la propiedad de escalamiento:

$$\mathcal{F}\{x(\frac{-t}{3})\} = |-3|X(-3\omega) = 3\frac{\jmath(-3\omega)}{(-3\omega)^2 - 3\jmath(-3\omega) - 2} = \frac{-\jmath\omega}{\omega^2 + \jmath\omega - \frac{2}{9}}$$

e) Ocupamos la propiedad del producto:

$$x(t)\cos(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \mathcal{F}\{\cos(t)\}$$

Donde:

$$\mathcal{F}\{\cos(t)\} = \pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{F}\{x(t)\cos(t)\} \rightarrow \frac{1}{2}[X(\omega - 1) + X(\omega + 1)]$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\cos(t)\} = \frac{1}{2}\frac{\jmath(\omega - 1)}{(\omega - 1)^2 - 3\jmath(\omega - 1) - 2} + \frac{1}{2}\frac{\jmath(\omega + 1)}{(\omega + 1)^2 - 3\jmath(\omega + 1) - 2}$$

f) Tenemos:

$$x(t) * x(t-1) \to X(\omega)X(\omega)e^{-\jmath\omega}$$

$$\mathcal{F}\{x(t) * x(t-1)\} = \frac{-\omega^2 e^{-\jmath\omega}}{[\omega^2 - 3\jmath\omega - 2]^2}$$

4. **Sistema Modulado.** Pedrito quiere modular una señal $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, con otra señal $m(t) = \text{sinc}(t)$ para ver qué tipo de salida tiene en frecuencia si se ocupa $T = 1$. Él le pide ayuda; entonces lo que tiene que hacer es encontrar la salida $Y(\omega)$ y explicarle qué fue lo que encontró.

Solución

La salida en frecuencia va a estar determinada por:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * M(\omega)$$

Ahora, vamos a pasar de tiempo a frecuencia:

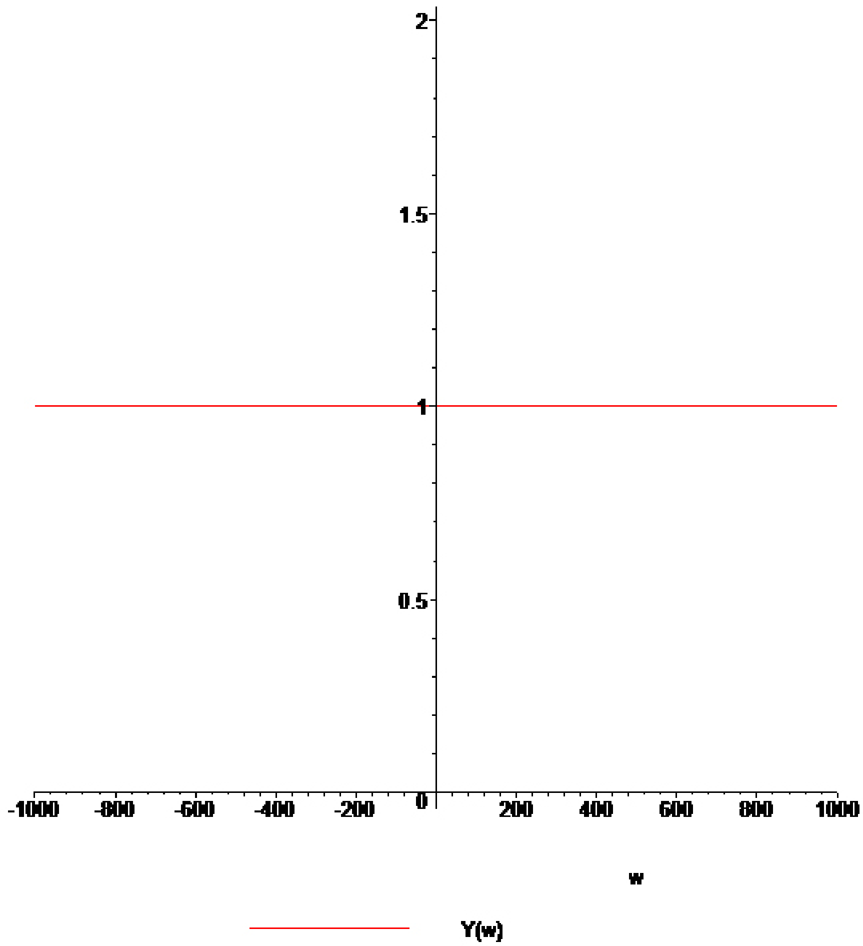
$$M(\omega) = \mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n)$$

$$Y(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{\omega - 2\pi n}{2\pi})$$

De lo anterior, es claro que:

$$Y(\omega) = 1(\omega)$$



El sistema de Pedrito tiene una constante de salida, eso quiere decir que el espectro contiene todas las frecuencias, y todas con la misma potencia, por lo tanto la salida es ruido blanco.