Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
17 de Marzo de 2009

Ayudantía N$^{\underline{o}}$ 2 - Álgebra Lineal
SISTEMA DE ECUACIONES

Resumen

Un sistema de n ecuaciones y m incógnitas se puede escribir de la forma Ax = b, tal que A es una matriz de n×m asociada al sistema, con $b \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^m$. Además, [A b] es la matriz ampliada del sistema.

Forma Escalonada (F.E.):

1. $a_{1,1} \neq 0$.
2. Si el pivote de la fila i está en la columna j, entonces el pivote de la fila i+1 está en la columna k, tal que $j < k$.
3. Las filas nulas están al final de la matriz.

Forma Escalonada Reducida (F.E.R.):

1. Está en la F.E.
2. Todos los pivotes son iguales a 1.
3. Los vectores columna que contienen pivotes son canónicos.

Operaciones Fila:

1. Tipo I: Intercambiar dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$.
2. Tipo II: Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $F_i \rightarrow \lambda F_i$.
3. Tipo III: Sumar a una fila, un múltiplo escalar de otra: $F_i \rightarrow F_i + \lambda F_j$.

Un sistema Ax=b es homogéneo si $b = \vec{0}$ y no homogéneo si $b \neq \vec{0}$. El sistema es consistente si tiene solución (única o infinita) e inconsistente si no tiene solución.

Para el caso $b = \vec{0}$, el sistema es consistente y de solución única si la F.E. de A tiene m pivotes; de lo contrario es consistente y de infinitas soluciones.

Para el caso $b \neq \vec{0}$, el sistema es consistente y de solución única si y sólo si la F.E.R. de [A b] tiene m pivotes, si tiene menos es consistente y de infinitas soluciones. El sistema es inconsistente si y sólo si la F.E.R. de [A b] tiene una fila de la forma [0 ... 0 α], donde $\alpha \neq 0$.

Ejercicios

1. Sean $v_1,\, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{v_1,\, v_2\}$ es L.I. si y sólo si $\{v_1 - 2v_2,\, 5v_2 - v_1\}$ es L.I.

2. Demuestre que si v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2, entonces:

$$\langle\{v_1,\, v_2,\, v_3\}\rangle = \langle\{v_1,\, v_2\}\rangle$$

3. Encuentre una matriz A tal que:

$$\mathrm{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y + 2w \end{bmatrix}$$

4.Demuestre que si un sistema de ecuaciones tiene dos soluciones distintas, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones.

5. Encuentre la forma escalonada reducida y el rango de las siguientes matrices:

a) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

<u>NOTA:</u> Para revisar los resultados pueden ocupar el siguiente comando en Matlab:

```
A = [1 0 1 -2;3 0 0 1;4 4 0 2;1 2 0 -3]
rref(A)
```

6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a)

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

7. Encuentre la solución general del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 - 12x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= -4 \\ -7x_1 + 21x_2 + 2x_3 + 18x_4 &= 7 \end{aligned}$$

NOTA: Para comprobar los resultados de los ejercicios la forma Ax=b con Matlab:

$$x = A\backslash b$$

8. Determine si existen valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema Ax = b:
(i) no tenga solución (ii) tenga solución única (iii) tenga infinitas soluciones, donde

$$\text{A=}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{bmatrix} \text{ y b=}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$$

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl

Ayudantía Examen - Álgebra Lineal
VALORES Y VECTORES PROPIOS

Resumen

- **Valores Propios**
  Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si se cumple lo siguiente:
  $$|A - \lambda I| = 0$$

- **Vectores Propios**
  Se dice que υ_i es un vector propio asociado a un valor propio λ_i si se cumple lo siguiente:
  $$A\upsilon_i = \lambda\upsilon_i$$
  Esto significa que para obtener el vector propio asociado se debe resolver:
  $$\upsilon_i = ker(A - \lambda I)$$

- **Multiplicidad Algebraica**
  Es la multiplicidad como raiz del valor propio en el polinomio característico. En otras palabras, es el número de veces que aparece repetido el valor propio.

- **Multiplicidad Geométrica**
  Es la dimensión de $ker(A - \lambda I)$. En otras palabras, es el número de vectores propios asociados a un vector propio.

- **Diagonalización**

  Una matriz A es diagonalizable si:

  - Se puede expresar de la forma $A = VDV^{-1}$.
  - Para cada valor propio, la multiplicidad algebraica es igual a la multiplicidad geométrica. Es decir, tiene n vectores propios L.I.
  - El polinomio característico tiene n raices reales y distintas. Es decir, tiene n valores propios distintos.

- **Notas**

  - No todas las matices son diagonalizables.
  - Una matriz diagonalizable no es necesariamente invertible. No tiene relación.
  - Una matriz A no es invertible si y sólo si 0 no es un valor propio asociado.
  - En una matriz A simétrica, los valores propios de A son iguales a los de A^T.
  - En una matriz A simétrica, si todos los valores propios son positivos, significa que A en positiva definida.
  - La suma de los valores propios asociados a una matriz A son la suma de los elementos de la diagonal de dicha matriz.
  - El producto de los valores propios asociados a una matriz A son el determinante de la matriz A.

Ejercicios

1. **Ker Complicado.** Sea A= $\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Decida justificadamente si A es diagonalizable.
b) Calcule $ker(A^{\beta} - \alpha^{\beta} I)$, donde $\beta \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN:

Una forma para demostrar que A es diagonalizable es mostrar que se puede descomponer en: $A = PDP^{-1}$. Es decir, debemos comprobar que cada valor propio tiene un vector propio asociado.

Partimos buscando los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha & \alpha \\ \alpha & -\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \alpha^2) - \alpha(-\alpha\lambda - \alpha^2) + \alpha(\alpha\lambda + \alpha^2) = 0$$

$$\rightarrow |A - \lambda I| = -(\lambda + \alpha)^2(\lambda - 2\alpha) = 0.$$

$$\therefore \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 2\alpha$$

Ahora buscamos el vector propio asociado a cada valor propio:

$$ker(A + \alpha I) \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore ker(A + \alpha I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

$$ker(A - 2\alpha I) \rightarrow \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & -2\alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \alpha & -1/2\alpha & -1/2\alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore ker(A-2\alpha I)=\langle\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\rangle$$

Entonces, como cada valor propio tiene un vector propio asociado, podemos afirmar que A es diagonalizable.

Ahora, buscamos $ker(A^{\beta}-\alpha^{\beta}I)$:

De la parte anterior, sabemos que A se puede descomponer en: $A=PDP^{-1}$, con

$$D=\begin{bmatrix}-\alpha & 0 & 0\\ 0 & -\alpha & 0\\ 0 & 0 & 2\alpha\end{bmatrix} \text{ y } P=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, A^{β} se puede escribir de la siguiente forma:

$$A^{\beta}=(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1}) \qquad /\beta \text{ veces}$$

Además, como sabemos que $PP^{-1}=P^{-1}P=I$ podemos llegar a que:

$$A^{\beta}=PD^{\beta}P^{-1}$$

Calculamos $A^{\beta}-\alpha^{\beta}I$:

$$A^{\beta}-\alpha^{\beta}I=PD^{\beta}P^{-1}-\alpha^{\beta}PP^{-1}$$

$$\rightarrow A^{\beta}-\alpha^{\beta}I=P(D^{\beta}-\alpha^{\beta}I)P^{-1}$$

Entonces, el cálculo de $ker(A^{\beta}-\alpha^{\beta}I)$ se reduce a calcular $ker(P(D^{\beta}-\alpha^{\beta}I)P^{-1})$, pero cabe destacar lo siguiente:

$$ker(A^{\beta}-\alpha^{\beta}I)\rightarrow(A^{\beta}-\alpha^{\beta}I)\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$$

$$ker(P(D^{\beta}-\alpha^{\beta}I)P^{-1})\rightarrow(P(D^{\beta}-\alpha^{\beta}I)P^{-1})\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}\rightarrow(D^{\beta}-\alpha^{\beta}I)\overrightarrow{y}=\overrightarrow{0}$$

Donde $\overrightarrow{y}=P^{-1}\overrightarrow{x}$.

<u>Nota:</u> P no se considera en el último cálculo, ya que no influye. P es una matriz formada por vectores LI.

Calculamos $ker(D^\beta - \alpha^\beta I)$:

$$D^\beta - \alpha^\beta I \to \begin{bmatrix} (-\alpha)^\beta & 0 & 0 \\ 0 & (-\alpha)^\beta & 0 \\ 0 & 0 & (2\alpha)^\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha^\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^\beta \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} [(-1)^\beta - 1]\alpha^\beta & 0 & 0 \\ 0 & [(-1)^\beta - 1]\alpha^\beta & 0 \\ 0 & 0 & [2^\beta - 1]\alpha^\beta \end{bmatrix}$$

Notamos que debemos analizar para β par e impar:

β par:

$$D^\beta - \alpha^\beta I \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [2^\beta - 1]\alpha^\beta \end{bmatrix}$$

$$\to ker(D^\beta - \alpha^\beta I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \qquad \therefore\ ker(A^\beta - \alpha^\beta I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

β impar:

$$D^\beta - \alpha^\beta I \to \begin{bmatrix} -2\alpha^\beta & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha^\beta & 0 \\ 0 & 0 & [2^\beta - 1]\alpha^\beta \end{bmatrix}$$

$$\to ker(D^\beta - \alpha^\beta I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \qquad \therefore\ ker(A^\beta - \alpha^\beta I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

2. **Demostración con Valores Propios.** Sea $A_{3\times 3}$, una matriz simétrica que tiene los siguientes valores propios:

$$\lambda_1 = \alpha$$
$$\lambda_2 = \beta$$
$$\lambda_3 = \beta + 3$$

Donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\beta > \alpha$.

Demostrar que existe un $\gamma \in \mathbb{R}$ y determinar las condiciones necesarias para que la matriz $A - (3\gamma - 2\beta)I$ sea negativa definida.

SOLUCIÓN:

Otra forma de ver la clasificación de matrices, es analizar los valores propios de la matriz en cuestión.

En este caso tenemos ya sabemos cuales son los valores propios de A. Ahora, como A es simétrica también sabemos cuales son los valores propios de $A - (3\gamma - 2\beta)I$:

$$A \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \beta \quad \text{y} \quad \lambda_3 = \beta + 3$$
$$A - (3\gamma - 2\beta)I \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \alpha - (3\gamma - 2\beta), \quad \lambda_2 = \beta - (3\gamma - 2\beta) \quad \text{y} \quad \lambda_3 = \beta + 3 - (3\gamma - 2\beta)$$

Finalmente:

$$\lambda_1 = \alpha + 2\beta - 3\gamma, \quad \lambda_2 = 3\beta - 3\gamma \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 3\beta - 3\gamma + 3$$

Ahora, para que $A - (3\gamma - 2\beta)I$ sea negativa definida cada valor propio debe ser negativo:

$$\lambda_1 < 0 \;\; \rightarrow \;\; \gamma > 1/3\alpha + 2/3\beta$$

$$\lambda_2 < 0 \;\; \rightarrow \;\; \gamma > \beta$$

$$\lambda_3 < 0 \;\; \rightarrow \;\; \gamma > \beta + 1$$

Con lo anterior notamos que existe un $\gamma \in \mathbb{R}$ que cumple lo pedido, y la condición va a ser que $\gamma > \beta + 1$.

3. **Vector Propio defectuoso.** Sea A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcular e^{A^2-I}.

<u>SOLUCIÓN:</u>

Para resolver este tipo de ejercicios, lo mejor es ver si A es diagonalizable. Para eso vamos a hacer lo típico, valores y vectores propios, pero ahora vamos a obtener los estos valores de una manera diferente:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad Det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

En este caso tenemos:

$$\lambda_1 + \lambda_1 = 8 \qquad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 16$$

$$\therefore \; \lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

Ahora buscamos los vectores propios:

$$ker(A - 4I) \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos un problema, ya que para 2 valores propios sólo tenemos un vector propio, multiplicidad algebraica mayor a multiplicidad geométrica. Por lo tanto, no podemos diagonalizar A ya que tenemos un vector propio defectuoso.

Pero no todo es tan malo, ya que tenemos otra opción. En un comienzo nosotros queríamos llegar a una matriz de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Y podemos notar que A es similar a una matriz J, llamada forma canónica de Jordan, que es de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Entonces, vamos a poder escribir A de la siguiente forma:

$$A = PJP^{-1}$$

Hay que destacar que P no es igual a la matriz de vectores porpios inicial (V).

Ahora comenzamos a resolver de forma análoga al caso normal, sólo que ahora lo vamos a hacer en detalle.

$$AP = PJ$$

$$[Ap_1|Ap_2] = [\lambda p_1|p_1 + \lambda p_2]$$

$$\rightarrow Ap_1 = \lambda p_1 \qquad \therefore\ (A - \lambda I)p_1 = 0$$
$$\rightarrow Ap_2 = p_1 + \lambda p_2 \qquad \therefore\ (A - \lambda I)p_2 = p_1$$

Calculamos p_1 y p_2.

De la primera parte del ejercicio podemos obtener p_1:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ahora p_2:

$$(A - 4I)p_2 = p_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora calculemos e^{A^2-I}:

$$e^{A^2-I} = P \cdot e^{J^2-I} \cdot P^{-1}$$

Partimos calculando e^J:

$$e^J = exp\left\{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right\} = exp\left\{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = exp\left\{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right\} \cdot exp\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$e^J = \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \overbrace{\frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2}^{0} + \ \dots \ \right\} = \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^J = \begin{bmatrix} e^4 & e^4 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix}$$

A continuación e^{J^2}:

$$e^{J^2} = \begin{bmatrix} e^4 & e^4 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^4 & e^4 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^8 & 2e^8 \\ 0 & e^8 \end{bmatrix}$$

Y ahora e^{J^2-I}:

$$e^{J^2-I} = \begin{bmatrix} e^8 - e & 2e^8 \\ 0 & e^8 - e \end{bmatrix}$$

Finalmente, calculamos e^{A^2-I}:

$$e^{A^2-I} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^8 - e & 2e^8 \\ 0 & e^8 - e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{A^2-I} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4e^8 & e - 5e^8 \\ 2e - 2e^8 & 2e - 2e^8 \end{bmatrix}$$

$$e^{A^2-I} = \begin{bmatrix} -3e^8 - e & -4e^8 \\ 4e^8 & 5e^8 - e \end{bmatrix}$$

4. **Descomposición Espectral.** Para una matriz $A_{n\times n}$ simétrica que cumpla:

$$A = VDV^T$$

y que su matriz de vectores propios sea ortogonal, se dice que tiene descomposición espectral si puede escribirse de la siguiente forma:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \upsilon_i \upsilon_i^T$$

Dada la siguiente matriz A, encontrar su descomposición espectral.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Lo primero que vamos a hacer es diagonalizar A. Para eso, partimos buscando los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Para obtener los valores propios podemos simplemente sacarlos de la forma tradicional o analizar los ejercicios anteriores para ver que en algunos casos hay métodos más simples.

Del primer ejercicio sabemos que los valores propios son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 2\alpha \qquad / \text{ en este caso, con } \alpha = 1$$

Además como A es simétrica, podemos ver el segundo ejercicio y notar que tenemos:

$$A + 3I \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha + 3 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 2\alpha + 3$$

Finalmente:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 5$$

Ahora, buscamos los vectores propios:

$$ker(A-2I) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore ker(A-2I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

$$ker(A-5I) \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore ker(A-5I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

Hay que recordar que P es ortogonal, por tanto debemos verificar que los vectores que la forman sean ortogonales y luego normalizar. Notamos que v_1 y v_2 no son ortogonales, por eso vamos a ocupar Gram-Schmidt para tener vectores ortogonales:

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El último cambio fue sólo para que sea más fácil normalizar. Ahora normalizamos:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la descomposición espectral de A esta dada por:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. **Sucesiones Infinitas.** Sea $A_{2\times 2}$ una matriz que cumple lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \forall \; n \in [2, \infty[$$

Además, se define recursivamente la sucesión de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = 5/4 x_n - 1/4 x_{n-1} \qquad C.I. \;\; \rightarrow \;\; x_1 = 1 \;\; y \;\; x_0 = 0$$

Entonces, se pide mostrar:

i) Si la sucesión converge o no. Si llegase a converger, determinar el vector al cual converge.
ii) Si la convergencia o divergencia de la sucesión depende de las condiciones iniciales.

<u>SOLUCIÓN:</u>

Lo primero que debemos hacer es buscar la matriz A. En este caso se puede obtener por una simple inspección:

$$\begin{bmatrix} 5/4x_n - 1/4x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora buscamos valores propios analizando la traza y el determinante de A:

$$\rightarrow \;\; \lambda_1 = 1/4 \quad y \quad \lambda_2 = 1$$

La búsqueda de vectores propios también es trivial:

$$\rightarrow \;\; \upsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y \quad \upsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalizamos A:

$$A = VDV^{-1} \;\; \rightarrow \;\; A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Ahora debemos notar lo siguiente:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$$
$$A^2 \cdot \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$A^n \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Además:

$$A^n = VD^nV^{-1} \;\; \rightarrow \;\; A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/4)^n & 0 \\ 0 & (1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$n \;\rightarrow\; \infty$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & -1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Es claro que la sucesión converge sin importar el valor de las condiciones iniciales.

Finalmente, buscamos el vector al cual converge la sucesión:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & -1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl

Ayudantía Examen - Álgebra Lineal
ORTOGONALIDAD

Resumen

- **Ortogonalidad**

  u y v son ortogonales si su producto interno es cero.

  $$u \cdot v = 0$$

- **Conjuntos Ortogonales y Ortonormales**
  - Conjunto Ortogonal: Sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \rightarrow v_i \cdot v_j = 0$.
  - Conjunto Ortonormal: Sea S ortogonal y $\|v_i\| = 1$.

- **Matrices Ortogonales**

  Una matriz A es una matriz ortogonal si es cuadrada y tiene columnas ortonormales.

  Una matriz ortogonal cumple:
  - $A\vec{u} \cdot A\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
  - $\|A\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

  Nota: A este tipo de matrices no se les llama matrices ortonormales.

- **Proyecciones**
  - $U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^n$
  - P: Proyección ortogonal en U
  - P: Proyección ortogonal en $U^{\perp}$
  - $Im(P) = U \quad ker(P) = U^{\perp}$
  - $Im(Q) = U^{\perp} \quad ker(Q) = U$

- **Matriz de Proyección**
  - $P + Q = I$
  - $P = B(B^T B)^{-1} B^T$

- **Matriz de Reflexión**
  - $R = 2P - I$
  - $R^2 = I$
  - $R^T = R$

- **Gram-Schmidt**

  Es una forma de transformar una base no ortogonal (U) en una base ortogonal (V).

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \left(\frac{u_2 v_1}{v_1 v_1}\right) v_1$$

$$v_3 = u_3 - \left(\frac{u_3 v_1}{v_1 v_1}\right) v_1 - \left(\frac{u_3 v_2}{v_2 v_2}\right) v_2$$

- **Mínimos Cuadrados**

  Se pretende minimizar la expresión $\|A\vec{x} - b\|$. Para eso, debemos proyectar ortogonalmente a $A\vec{x}$ sobre b, por lo tanto debemos resolver:

  $$A^T A\vec{x} = A^T b$$

  Nota: Si $A^T A$ es invertible, el problema anterior se reduce a:

  $$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

- **Notas**

  - Los conjuntos ortogonales son L.I.
  - Si A y B son matrices ortogonales AB también es una matriz ortogonal.
  - Una matriz con columnas ortonormales, pero no cuadrada no es llamada matriz ortogonal.
  - Normalizar un vector v_i significa que su módulo debe ser igual a 1. En la práctica, significa que hay que dividirlo por $\|v_i\|$.
  - $ker(A^T) = Im(A)^\perp$
  - $ker(A^T) \perp Im(A)$
  - $\dim(S \oplus S^\perp) = n$

Ejercicios

1. **Regresión Lineal.** Se ha hecho un estudio que mide el grado de respuesta de ciertas personas (b) frente a 2 tipos de estímulos (a_1, a_2).

En la siguiente tabla se adjuntan los datos:

b	a_1	a_2
2	1	0
1	0	0
3	0	1

Para determinar el grado de respuesta esperado, se ha usado el siguiente modelo:

$$b = \alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$$

Entonces, se pide calcular los parámetros α_0, α_1 y α_2 mediante el método de mínimos cuadrados para obtener la ecuación del modelo.

SOLUCIÓN:

Debemos resolver:

$$A^T A\vec{x} = A^T b$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Calculamos $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siempre conviene revisar si $A^T A$ es invertible, ya que en algunos casos resulta muy fácil resolver estos problemas.

En este caso, $A^T A$ es invertible, ya que $|A^T A| = 1 \neq 0$. Por lo tanto vamos a calcular la inversa y el problema se va a reducir a sólo una multiplicación de matrices.

$$(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces, debemos calcular:

$$\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Y la ecuación del modelo sería:

$$b = 1 + a_1 + 2a_2$$

2. **Proyección Ortogonal.** Dada la siguiente información:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{V} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle$$

Determinar la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el subespacio $\mathbb{V}$.

<u>SOLUCIÓN:</u>

Lo primero que debemos hacer es verificar que el subespcio tenga sólo elementos L.I. Es claro que en $\mathbb{V}$ hay un vector L.D., por lo tanto debemos eliminar el tercer vector.

A continuación, debemos resolver $A^T\vec{v} = A^TA\vec{x}$, donde A es una matriz formada por las bases de $\mathbb{V}$.

$$\mathbb{V} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \qquad \rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos $A^T\vec{v} = A^TA\vec{x}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\therefore \ \vec{x} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

Como ya tenemos $\vec{x}$, ahora debemos encontrar $P(\vec{v})$:

$$P(\vec{v}) = A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 \\ -3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/6 \\ 1/3 \\ -7/6 \end{bmatrix}$$

A continuación buscamos $Q(\vec{v})$:

$$\vec{v} = P(\vec{v}) + Q(\vec{v}) \qquad \rightarrow \qquad Q(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11/6 \\ 1/3 \\ -7/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/6 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto ya tenemos las proyecciones:

- Proyección de $\vec{v}$ sobre $\mathbb{V}$: $\quad P(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 11/6 \\ 1/3 \\ -7/6 \end{bmatrix}$
- Proyección de $\vec{v}$ sobre $\mathbb{V}^{\perp}$: $\quad Q(\vec{v}) = \begin{bmatrix} -5/6 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{bmatrix}$

Finalmente comprobamos que $P(\vec{v})$ y $Q(\vec{v})$ sean ortogonales:

$$P(\vec{v}) \cdot Q(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 11/6 & 1/3 & -7/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5/6 \\ 5/3 \\ -5/6 \end{bmatrix} = 0$$

<u>Nota:</u> Cuando se debe proyectar, es mejor hacerlo primero sobre el espacio que tenga menor dimensión, ya que es más fácil.

3. **Dimensiones.** Sea A una matriz que cumple lo siguiente:

$$\dim(ker(A)) = 3$$

$$A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinar:

i) Las dimensiones de $Im(A)$, $Im(A^T)$ y $ker(A^T)$.
ii) Para $Im(A)$, una base ortonormal.

SOLUCIÓN:

Primero debemos ver cuales son las dimensiones de A y A^T:

$$A \text{ es de } 4 \times 5 \rightarrow \dim(ker(A)) + \dim(Im(A)) = 5$$

$$A^T \text{ es de } 5 \times 4 \rightarrow \dim(ker(A^T)) + \dim(Im(A^T)) = 4$$

Hay que recordar que $\dim(Im(A)) = \dim(Im(A^T))$.

Por lo tanto tenemos:

- $\dim(ker(A)) = 3$
- $\dim(ker(A^T)) = 2$
- $\dim(Im(A)) = 2$
- $\dim(Im(A^T)) = 2$

Ahora, como sabemos que $ker(A^T) = Im(A)^{\perp}$, podemos decir lo siguiente:

$$Im(A) = ker(A^T)^{\perp} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle^{\perp}$$

Buscamos 2 bases para $Im(A)$:

$$Im(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Notamos que estas bases son ortogonales entre si, asique lo único que falta es normalizarlas:

$$Im(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

4. **Matriz de Reflexión.** Sea A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Calcular la matriz de proyección sobre $Im(A)^{\perp}$ y la matriz de reflexión.

<u>SOLUCIÓN:</u>

Primero, debemos notar que $Im(A)$ tiene una menor dimensión que $Im(A)^{\perp}$ $(1 < 2)$.

Por lo tanto, es mejor trabajar con $Im(A)$, ya que tiene menos trabajo involucrado.

<u>Nota:</u> $Im(A)$ e $Im(A)^{\perp}$ son subespacios ortogonales, y hay que recordar que cumplen: $P + Q = I$, por lo tanto da lo mismo con cual trabajar.

Volviendo al ejercicio, tenemos lo siguiente:

$$Im(A) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rangle$$

Calculamos la matriz de proyección sobre $Im(A)$:

$$Q_{Im(A)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q_{Im(A)} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Ahora buscamos la matriz de proyección sobre $Im(A)^{\perp}$:

$$P_{Im(A)^{\perp}} = I - Q_{Im(A)} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 20 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & -8 \\ -4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz de reflexión:

$$R = 2P_{Im(A)^{\perp}} - I = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 19 & -4 & -8 \\ -4 & 13 & -16 \\ -8 & -16 & -11 \end{bmatrix}$$