Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
7 de Marzo de 2011

Ayudantía Nº 1 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

EC. SEPARABLES, FAMILIAS ORTOGONALES Y MODELOS

Resumen

Ecuaciones Separables

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{1}$$

es separable o de variables separables.

Ahora bien, si $y = \phi(x)$ representa la solución de (1), se debe cumplir

$$\int h(\phi(x))\phi'(x)dx = \int g(x)dx \tag{2}$$

Pero $dy = \phi'(x)dx$, de modo que la ecuación (2) es lo mismo que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \qquad ó \qquad H(y) = G(x) + C \tag{3}$$

donde $H(y)$ y $G(x)$ son las antiderivadas de $h(y)$ y $g(x)$ respectivamente.[1]

<u>NOTA:</u> En estos casos siempre se debe tener presente las **soluciones especiales.**

Familias Ortogonales

Dos familias de curvas son ortogonales si en cada punto de intersección entre las curvas, las rectas tangentes forman ángulo $\pi/2$. Para que dos rectas sean ortogonales, el producto de sus pendientes debe ser -1. ¿Cuál sería el procedimiento si el ángulo es diferente a $\pi/2$?

[1]Extractos del libro *Ecuaciones Diferenciales 6^{ta} Ed. - Dennis G. Zill*

Algunos Modelos

- Ley de Enfriamiento de Newton
$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T_0 - T(t))$$

- Ley de Stefan
$$\frac{dX(t)}{dt} = k(T^4 - X(t)^4)$$

- Crecimiento Exponencial
$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$$

- Decaimiento Exponencial
$$\frac{dx(t)}{dt} = -rx(t)$$

- Formación de Sustancias Químicas
$$\frac{dx(t)}{dt} = k\left(A_0 - \frac{a_0}{c_0}x(t)\right)\left(B_0 - \frac{b_0}{c_0}x(t)\right)$$

- Logístico
$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right)$$

Ejercicios

1. Ecuación Separable. Resolver la siguiente ecuación:

$$y' = y^2 - 1$$

Solución

Notamos que es una ecuación separable.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 1 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y^2 - 1} = dx$$

Ahora, debemos recordar las soluciones especiales. Podemos hacer el paso anterior sólo si $y^2 - 1 \neq 0$. Por lo tanto las soluciones especiales de este ejercicio son:

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 \\ y(x) &= -1 \end{aligned}$$

Separamos en fracciones parciales y luego integramos:

$$\frac{dy}{(y-1)(y+1)} = dx \quad \rightarrow \quad \frac{dy/2}{y-1} - \frac{dy/2}{y+1} = dx$$

$$\int \frac{dy/2}{y-1} - \int \frac{dy/2}{y+1} = \int dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x + C$$

$$\ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = 2(x + C) \quad \rightarrow \quad \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^{2(x+C)}$$

$$\frac{y-1}{y+1} = \pm e^{2C} \cdot e^{2x} \quad \rightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = Ae^{2x}$$

Acabamos de encontrar lo que se llama solución implícita.

Ahora buscamos la solución explícita:

$$\frac{y-1}{y+1-(y-1)} = \frac{Ae^{2x}}{1-Ae^{2x}} \quad \rightarrow \quad \frac{y-1}{2} = \frac{A}{e^{-2x}-A}$$

Finalmente la solución explícita es:

$$y = 1 - \frac{2A}{A - e^{-2x}}$$

2. Trayectorias Ortogonales. Determine la familia curvas perpendiculares a la familia $x(t) = Ae^t$, además haga un bosquejo del campo de pendientes de ambas familias y determine las soluciones de las ecuaciones para la condición inicial $x(0) = 2$.

Solución

Sabemos que para que dos familias sean ortogonales, el producto de sus pendientes debe ser -1. Entonces, para la familia $x(t) = Ae^t$. Buscamos su pendiente m_1, la cual es trivial:

$$m_1 = \frac{dx(t)}{dt} = x(t)$$

Ahora, como sabemos que $m_1 \cdot m_2 = -1$, debemos encontrar m_2 que cumpla:

$$m_2 = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{x(t)}$$

Resolvemos la última ecuación y encontramos la familia pedida:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{x(t)} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2(t)}{2} = -t + C$$

Ocupamos la condidión inicial y obtenemos las siguientes curvas:

1. $x(t) = 2e^t$
2. $x(t) = \pm\sqrt{4 - 2t}$

PROPUESTO:
Repita el ejercicio anterior, pero esta vez ocupe $m_1 = Ae^t$ en vez de $m_1 = x(t)$.
¿Tiene sentido lo pedido?

Campos de direcciones del ejercicio 2.

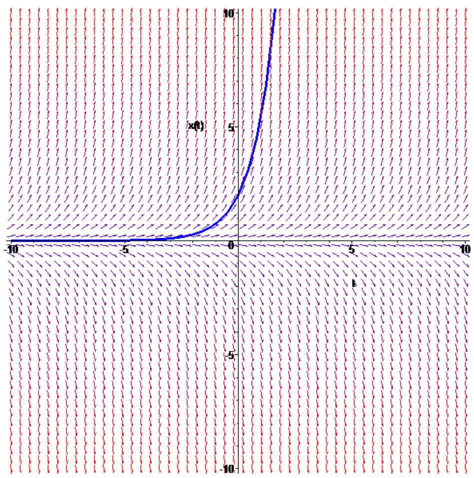


Figura 1: Trayectorias de 1.

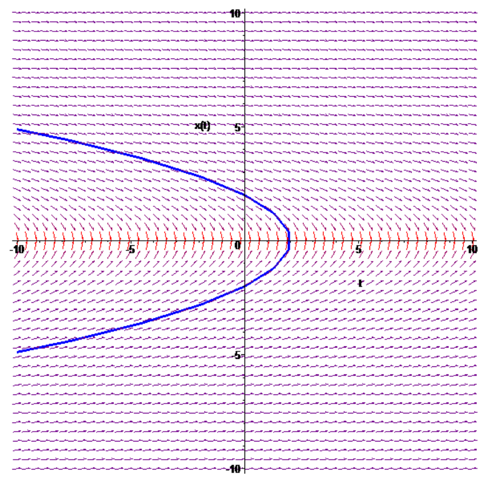


Figura 2: Trayectorias de 2.

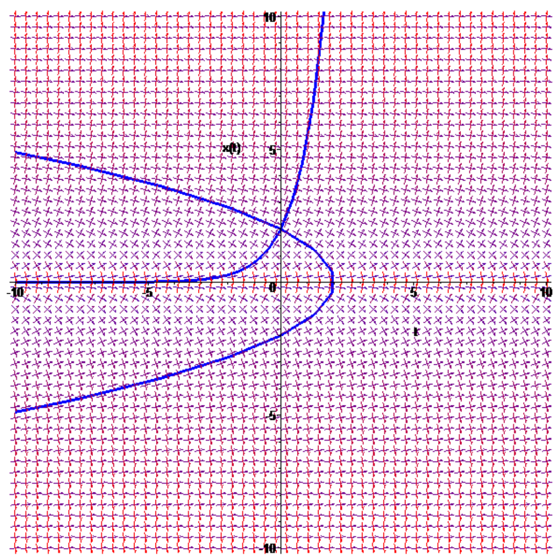


Figura 3: Trayectorias de ambas familias de curvas, con sus respectivas solcuciones.

3. Compra de helados. Pedrito está disfrutando junto a su familia un día en la playa, el día está soleado a una temperatura ambiente de 25^oC. Debido al calor, la mamá de Pedrito lo manda a comprar helados a un negocio cercano y le advierte que tiene que traerlos antes que se derritan(suponga que se empiezan a derretir a 10^oC). Pedrito compra los helados, que estaban almacenados en un congelador a 2^oC. En ese mismo instante se encuentra con un amigo y conversan por 4 minutos, donde se da cuenta que la temperatura de los helados subio en 7^oC. ¿Cuánto tiempo se tiene que demorar Pedrito en llevar los helados a su familia para que éstos no se derritan?

Solución

Lo primero que debemos hacer es determinar el modelo a ocupar, en este caso, es la ley de enfriamiento de Newton:

$$T'(t) = k(T_0 - T(t))$$

Sabemos que $T_0 = 25^oC$ y que la condición inicial es $T(0) = 2^oC$. Ahora resolvemos la ecuación para luego ocupar las condiciones.

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(25 - T(t)) \quad \rightarrow \quad \frac{dT(t)}{25 - T(t)} = kdt$$

Integramos:

$$-\ln(25 - T(t)) = kt + C \quad \rightarrow \quad T(t) = 25 - Ae^{-kt}$$

Ocupamos la condición inicial:

$$T(0) = 25 - Ae^{-k\cdot 0} \quad \rightarrow \quad 2 = 25 - A \qquad \therefore \quad A = 23$$

Sólo falta determinar k, para eso ocupamos la condición adicional $T(4) = 9^oC$:

$$T(4) = 25 - 23e^{-k\cdot 4} \quad \rightarrow \quad e^{-4k} = \frac{25-9}{23} \qquad \therefore \quad k = -0{,}25\ln(16/23)$$

Resumiendo, el modelo para el caso de los helados es de la siguiente forma:

$$T(t) = 25 - 23e^{0{,}25\ln(16/23)\cdot t}$$

Finalmente, determinamos el tiempo t_0 que necesita Pedrito para llevar los helados sin que se derritan.

$T(t_0) = 10^oC$:

$$T(t_0) = 25 - 23e^{0,25\ln(16/23)\cdot t_0} \quad \rightarrow \quad e^{0,25\ln(16/23)\cdot t_0} = \frac{25-10}{23}$$

$$t_0 = 4 \cdot \frac{\ln(15/23)}{\ln(16/23)} \approx 4{,}71$$

$$t_0 \approx [4:43]$$

Por lo tanto, Pedrito debe demorarse menos de 43 segundos para llevar los helados a su familia sin que se derritan.

4. Epidemia de sarampión. En 2008, una epidemia de sarampión afectó a un pequeño pueblo al sur de Suiza, donde luego de un análisis, se pudo determinar que la difusión de la epidemia se puede modelar logísticamente:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right)$$

donde $y(t)$ representa la cantidad de habitantes infectados pasados t días. Al inicio de la epidemia, de los mil habitantes sólo habían 50 infectados. Después de dos días el número de infectados aumentó a 320.

a) ¿Cuál es el número de habitantes que estarán infectados después de cinco días?

b) ¿Cuántos días tienen que pasar para que la mitad de la población esté infectada?

Solución

Primero resolvemos la ecuación logística:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{dy(t)}{y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right)} = kdt$$

Ocupamos fracciones parciales:

$$\left(\frac{1}{y(t)} + \frac{1/M}{1 - y(t)/M}\right) dy(t) = kdt$$

Integramos:

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1 - y(t)/M}\right| = kt + C \quad \rightarrow \quad \frac{y(t)}{1 - y(t)/M} = Ae^{kt}$$

Ya tenemos la solución implícita. Es una buena opción para aplicar la condición inicial y luego la condición adicional.

$y(0) = 50$:

$$\frac{50}{1 - 50/1000} = Ae^{k\cdot 0} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1000}{19}$$

$y(2) = 320$:

$$\frac{320}{1 - 320/1000} = \frac{1000}{19}e^{k\cdot 2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{152}{17}\right)$$

Buscamos la solución explícita:

$$\frac{y(t)}{1 - y(t)/1000 + y(t)/1000} = \frac{1000e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{152}{17}\right)t}}{19 + e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{152}{17}\right)t}} \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{1000}{1 + 19e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{152}{17}\right)t}}$$

a) Sólo debemos evaluar en la condición $y(5) = y_0$, donde y_0 es la cantidad de habitantes contagiados al quinto día.

$y(5) = y_0$:

$$y_0 = \frac{1000}{1 + 19e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{152}{17}\right)\cdot 5}} \quad \rightarrow \quad y_0 \approx 927$$

Tras el quinto día van a haber aproximadamente 927 habitantes contagiados.

b) Para este caso tenemos que evaluar en la condición $y(t_0) = 500$, donde t_0 es el tiempo transcurrido hasta que se contagia la mitad de la población.

$y(t_0) = 500$:

$$500 = \frac{1000}{1 + 19e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{152}{17}\right)\cdot t_0}} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{152}{17}\right)\cdot t_0 = \ln\left(\frac{1}{19}\right)$$

$$t_0 = \frac{-2\ln(1/19)}{\ln(152/17)} \approx 2{,}69$$

Para que la mitad de la población esté infectada, deben transurrir aproximadamente 2 días 16 horas y 30 minutos.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
14 de Marzo de 2011

Ayudantía Nº 2 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

ECUACIONES EXACTAS, LINEALES Y HOMOGÉNEAS

Resumen

Ecuaciones Exactas[1]

Una ecuación diferencial $M(x,y)+N(x,y)$ es una diferencial exacta en una región R del plano xy si corresponde a la diferencial de alguna función $f(x,y)$. Una ecuación diferencial exacta de primer orden es de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

Criterio: Sean continuas $M(x,y)$ y $N(x,y)$, con derivadas parciales continuas en una región rectangular, R, definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una diferencial exacta es que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2}$$

Método de Solución: Dada una ecuación como (1), se determina si es válida (2). Si se cumple, existe una función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

Podemos determinar f si integramos $M(x,y)$ con respecto a x, manteniendo y constante:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \tag{3}$$

[1]Extractos del libro *Ecuaciones Diferenciales* 6^{ta} *Ed. - Dennis G. Zill*

en donde la función arbitraria $g(y)$ es la *constante de integración*. Ahora derivamos (3) con respecto a y y suponemos que $\partial f/\partial y = N(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$$

Esto da

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \tag{4}$$

Por último, integramos (4) con respecto a y y sustituimos el resultado en (3). La solución de la ecuación es $f(x,y) = C$.

Ecuaciones Lineales[2]

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{5}$$

es una ecuación lineal estándar.

Método de Solución: Dada una ecuación como (5), lo primero que se debe hacer es identificar $P(x)$ y luego buscar el *factor integrante*:

$$e^{\int P(x)dx}$$

A continuación, se multiplica (5) por el *factor integrante*:

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = e^{\int P(x)dx}f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x)$$

Integramos:

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

Finalmente la solución a (5) está dada por:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

Nota: No es necesario memorizar la última ecuación, sino que entender el procedimiento.

[2]Extractos del libro *Ecuaciones Diferenciales 6ta Ed. - Dennis G. Zill*

Ecuaciones Homogéneas

Una ecuación como (1) es homogénea si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas de orden α. En otras palabras, la ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$x^\alpha M(y/x)dx + x^\alpha N(y/x)dy = 0$$

$$M(y/x)dx + N(y/x)dy = 0 \tag{6}$$

Nota: Recuerde que hay que verificar las soluciones especiales, $x(y) = 0$.

Hacemos el cambio de variable $u = y/x$ y reemplazamos en (6):

$$M(u)dx + N(u)[xdu + udx] = 0$$

$$[M(u) + uN(u)]dx + xN(u)du = 0 \tag{7}$$

De donde se aprecia que (7) es separable, por lo tanto, luego de resolverla se aplica nuevamente el cambio de variable $u = y/x$ y se obtiene la solución.

Ejercicios

1. Ecuaciones. Resolver la siguiente ecuaciones:

a) $x^3y' = 2xy^2 + x^2y$

b) $\left(1 + 4xy^3 + y^2\right) dx + \left(6x^2y^2 + 2xy\right) dy = 0$

c) $y' + y = x^2 \qquad y(0) = 1$

Solución

a) Escribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2 + x^2y}{x^3} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$$

Notamos que la ecuación es homogénea, podemos ocupar el cambio de variable: $u = y/x$.

$y = ux$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad x\frac{du}{dx} + u = 2u^2 + u$$

Ahora, la última ecuación es separable.

$$\frac{du}{2u^2} = \frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{-1}{2u} = \ln|x| + C$$

Finalmente reemplazamos $u = y/x$ nuevamente para obtener la solución:

$$y = \frac{-x}{2(\ln|x| + C)}$$

b) Comprobamos si la ecuación es exacta o no. Para eso, ocupamos (2):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1 + 4xy^3 + y^2\right) = 12xy^2 + 2y \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(6x^2y^2 + 2xy\right) = 12xy^2 + 2y \tag{9}$$

Es claro que (8) y (9) son iguales, por lo tanto, la ecuación es exacta. Ahora, para resolver la ecuación buscamos f según (3):

$$f(x,y) = \int \left(1 + 4xy^3 + y^2\right) dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \left(x + 2x^2y^3 + xy^2\right) + g(y) \tag{10}$$

Derivamos (10) con respecto a y y lo igualamos a $N(x,y)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(6x^2y^2 + 2xy\right) + g'(y) = 6x^2y^2 + 2xy$$

Apreciamos que $g'(y) = 0$, por lo tanto, $g(y) = K$, entonces:

$$f(x,y) = x + 2x^2y^3 + xy^2 + K = C$$

A la constante $C - K$ la vamos a llamar C_0. Finalmente la solución es:

$$x + 2x^2y^3 + xy^2 = C_0$$

c) Notamos que es una ecuación lineal, por lo tanto debemos buscar $P(x)$ y luego determinar el factor integrante. $P(x)$ es uno, por lo tanto, el factor integrante es e^x. Entonces, multiplicamos la ecuación por e^x:

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x = e^x x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^x y\right] = e^x x^2$$

Integramos:

$$e^x y = \int e^x x^2 dx \tag{11}$$

En el lado derecho de (11) tenemos una integral que podemos resolver por partes:

$$\int e^x x^2 dx = e^x x^2 - 2\int e^x x dx = e^x x^2 - 2\left\{e^x x - \int e^x dx\right\} + C$$

Entonces:

$$\int e^x x^2 dx = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + C \tag{12}$$

Reemplazamos (12) en (11):

$$e^x y = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + C$$

$$y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

Ahora ocupamos la CI $y(0) = 1$ en la ecuación anterior:

$$y(0) = C + 2 = 1 \quad \rightarrow \quad C = -1$$

Finalmente, la solución es:

$$y = -e^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

2. Ecuación Exacta. Resuelva la siguiente ecuación:

$$\left(-x^{-1}+9xy\right)dx+\left(x^{-1}y^{-1}-y^{-1}+6x^{2}\right)dy=0$$

con el método de ecuaciones exactas. Si la ecuación no es exacta, ocupe un factor integrante de la forma $u = x^{\alpha}y^{\beta}$ para resolverla.

Solución

Primero vemos si la ecuación es exacta o no. Para eso, ocupamos (2):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^{-1}+9xy\right)=9x \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-1}y^{-1}-y^{-1}+6x^{2}\right)=-x^{-2}y^{-1}+12x \tag{14}$$

Claramente (13) y (14) son distintas, por lo tanto, debemos ocupar el factor integrante:

$$x^{\alpha}y^{\beta}\left(-x^{-1}+9xy\right)dx+x^{\alpha}y^{\beta}\left(x^{-1}y^{-1}-y^{-1}+6x^{2}\right)dy=0$$

$$\left(-x^{\alpha-1}y^{\beta}+9x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\right)dx+\left(x^{\alpha-1}y^{\beta-1}-x^{\alpha}y^{\beta-1}+6x^{\alpha+2}y^{\beta}\right)dy=0 \tag{15}$$

Para determinar los parámetros α y β para que (15) sea exacta, ocupamos nuevamente (2):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^{\alpha-1}y^{\beta}+9x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\right)=-\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}+9(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\alpha-1}y^{\beta-1}-x^{\alpha}y^{\beta-1}+6x^{\alpha+2}y^{\beta}\right)=(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta-1}-\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta-1}+6(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} \tag{17}$$

Igualamos (16) y (17):

$$-\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}+9(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta}=(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta-1}-\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta-1}+6(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta}$$

$$-\beta x^{-1}y^{-1}+9(\beta+1)x=(\alpha-1)x^{-2}y^{-1}-\alpha x^{-1}y^{-1}+6(\alpha+2)x$$

$$(1-\alpha)x^{-2}y^{-1}+(\alpha-\beta)x^{-1}y^{-1}+(-6\alpha+9\beta-3)x=0 \tag{18}$$

Para que la ecuación sea exacta se tiene que cumplir (18), y la única opción para eso es que el lado derecho como el izquierdo sean nulos.

Buscamos los valores de α y β:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= 0 \\ \alpha-\beta &= 0 \\ -6\alpha+9\beta-3 &= 0 \end{aligned}$$

La solución del sistema anterior es $(\alpha, \beta) = (1,1)$, por lo tanto, el factor integrante es $\mu(x,y) = xy$ y la ecuación sería:

$$\left(-y+9x^2y^2\right) dx + \left(1-x+6x^3y\right) dy = 0$$

Ahora, para resolver la ecuación buscamos f según (3):

$$f(x,y) = \int \left(-y+9x^2y^2\right) dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \left(-xy+3x^3y^2\right) + g(y) \tag{19}$$

Derivamos (19) con respecto a y y lo igualamos a $N(x,y)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(-x+6x^3y\right) + g'(y) = 1-x+6x^3y$$

Según lo anterior $g'(y) = 1$, por lo tanto, $g(y) = y+K$. Eso nos da que $f(x,y) = y-xy+3x^3y^2+K$. Finalmente la solución es:

$$f(x,y) = C \quad \to \quad y-xy+3x^3y^2 = C-K = cte.$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
`fnyanez@uc.cl`
21 de Marzo de 2011

Ayudantía Nº 3 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

BERNOULLI

Resumen

Ecuaciones Bernoulli

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n \tag{1}$$

es una ecuación Bernoulli.

Cabe destacar que cuando $n = 0$ la ecuación es lineal y cuando $n = 1$ es separable.

Método de Solución: Cuando n es diferente a los casos propuestos anteriormente, debemos tratar de modificar la ecuación a alguna que sepamos resolver. En este caso, podemos apreciar que la ecuación (1) es muy parecida a una ecuación lineal, por lo tanto, debemos tratar de eliminar el término y^n. Para eso, multiplicamos la ecuación por $(1-n)y^{-n}$, obteniendo:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)y^{-n}P(x)y = f(x)y^n(1-n)y^{-n}$$

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)f(x)$$

$$\frac{dy^{1-n}}{dx} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)f(x) \tag{2}$$

Dado el resultado de (2), lo mejor es hacer el cambio de variable $u = y^{1-n}$, obteniendo así una ecuación lineal:

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)f(x) \tag{3}$$

La ecuación (3) se resuelve para u y finalmente se hace el cambio $y = u^{1/(1-n)}$ para obtener la solución de la ecuación (1).

Ejercicios

1. Homogénea/Exacta. Resolver la siguiente ecuación:

$$(x+y)dx - (y-x)dy = 0 \qquad y(1) = 1$$

ocupando dos métodos diferentes.

Solución

<u>Método 1:</u> Escribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$(x+y)dx = (-x+y)dy \quad \to \quad x\left(1+\frac{y}{x}\right)dx = x\left(-1+\frac{y}{x}\right)dy$$

Notamos que la ecuación es homogénea, podemos ocupar el cambio de variable: $u = y/x$.

$y = ux$:

$$\left(1+\frac{ux}{x}\right)dx = \left(-1+\frac{ux}{x}\right)(xdu+udx) \quad \to \quad \left(-u^2+2u+1\right)dx = (u-1)xdu$$

Ahora, la última ecuación es separable:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{u^2-2u-1}du$$

Hacemos un cambio de variable $v = u^2 - 2u - 1$, $dv = 2(u-1)du$.

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2v}dv \quad \to \quad \ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|v| + C$$

$$\to \quad \ln|x| = -\frac{1}{2}\ln\left|u^2-2u-1\right| + C$$

$$\to \quad x^{-2} = A\left(u^2-2u-1\right)$$

Reemplazamos $u = y/x$:

$$x^{-2} = A\left((y/x)^2 - 2(y/x) - 1\right)$$

$$\rightarrow \quad B = y^2 - 2xy - x^2$$

Aplicamos la condición $y(1) = 1$:

$$B = 1 - 2 - 1 = -2$$

Finalmente:

$$y^2 - 2xy - x^2 = -2 \tag{4}$$

<u>Método 2:</u> Reescribimos:

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0$$

Notamos que la ecuación parece ser exacta. Comprobamos si lo es:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + y) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x - y) = 1$$

Es claro que son iguales, por lo tanto, la ecuación es exacta. Ahora, para resolver la ecuación buscamos f:

$$f(x, y) = \int (x + y)dx + g(y)$$

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2}{2} + xy\right) + g(y) \tag{5}$$

Derivamos (5) con respecto a y y lo igualamos a $N(x, y)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + g'(y) = x - y$$

Apreciamos que:

$$g'(y) = -y \quad \to \quad g(y) = -\frac{y^2}{2}$$

Entonces:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C$$

Aplicamos la condición $y(1) = 1$:

$$C = 1/2 + 1 - 1/2 = 1$$

Finalmente:

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = 1 \tag{6}$$

Aprecciamos que (4) y (6) son la misma solución a la ecuación planteada.

2. ¿Bernoulli?. Resuelva los siguientes ejercicios sabiendo que $t > 0$:

a) $t\frac{dx}{dt} - 3x = x^5 \quad x(1) = 1$

b) $t\frac{dx}{dt} - 3x = t^5 \quad x(1) = 1$

Solución

a) Esta ecuación es Bernoulli, ya que el término $x(t)$ es no-lineal. Dado esto debemos eliminar el término x^5 para así llegar a una ecuación lineal y así poder resolver el ejercicio.

Primero reescribimos la ecuación y luego multiplicamos por el factor $(1-n)x^{-n} = -4x^{-5}$:

$$\frac{dx}{dt} - 3\frac{x}{t} = \frac{x^5}{t} \quad \rightarrow \quad \frac{dx^{-4}}{dt} + 12\frac{x^{-4}}{t} = -\frac{4}{t}$$

Ahora, hacemos el cambio de variable $u = x^{-4}$:

$$\frac{du}{dt} + 12\frac{u}{t} = -\frac{4}{t}$$

Esta ecuación es lineal con $P(t) = 12/t$, por lo tanto, inferimos que el factor integrante es:

$$e^{\int P(t)dt} = e^{12\int 1/tdt} = e^{12\ln t} = e^{\ln t^{12}} = t^{12}$$

Multiplicamos la ecuaición por el factor integrante:

$$t^{12}\frac{du}{dt} + 12t^{11}u = -4t^{11} \quad \rightarrow \quad t^{12}u = -4\int t^{11}dt$$

$$t^{12}u = -\frac{1}{3}t^{12} + C \quad \rightarrow \quad u = -\frac{1}{3} + Ct^{-12}$$

Ahora, reemplazamos $u = x^{-4}$:

$$x^{-4} = -\frac{1}{3} + Ct^{-12} \quad \rightarrow \quad x^4 = \frac{3t^{12}}{3C - t^{12}}$$

Aplicamos la condición inicial y obtenemos que $C = 4/3$. Finalmente:

$$x = \frac{\sqrt{3}t^3}{\sqrt[4]{12 - 3t^{12}}}$$

b) Esta ecuación es lineal, bastante simple. Si ecribimos la ecuación como en a), notamos que $P(t) = -3/t$, por lo tanto, el factor integrante es t^{-3}. Dado todo lo anterior, obtenemos:

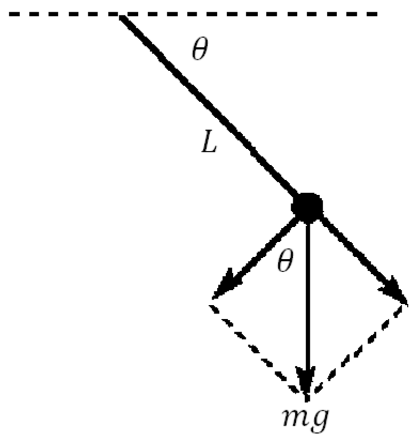
$$t^{-3}\frac{dx}{dt} - 3t^{-4} = t \quad \rightarrow \quad t^{-3}x = \int t dt$$

$$t^{-3}x = \frac{t^2}{2} + C \quad \rightarrow \quad x = \frac{t^5}{2} + Ct^3$$

Aplicamos la condición inicial y obtenemos que $C = 1/2$. Finalmente:

$$x = \frac{t^5}{2} + \frac{t^3}{2}$$

3. Péndulo. Otra aplicación de la reducción de orden puede encontrarse en algunos sistemas físicos, tales como sistemas masa-resorte, circuitos eléctricos, etc. A continuación se presenta un péndulo, el cual no tiene roce:



Entonces, se pide plantear la ecuación de movimiento del sistema con una ecuación diferencial de primer orden.

Solución

Del dibujo es trivial encontrar las ecuación de movimiento. Ocupamos la segunda ley de Newton para hacer la sumatoria de fuerzas:

$$mL\ddot{\theta} = mg\cos(\theta)$$

Dado lo anterior, lo que queremos hacer es integrar $\ddot{\theta}$ para llegar a una ecuación de primer orden. Para eso, es evidente que debemos multiplicar la ecuación anterior por $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} = \frac{g}{L}\cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{L} \cdot \sin(\theta)$$

Finalmente:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \cdot \sqrt{\sin(\theta)}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
`fnyanez@uc.cl`
28 de Marzo de 2011

Ayudantía Nº 4 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

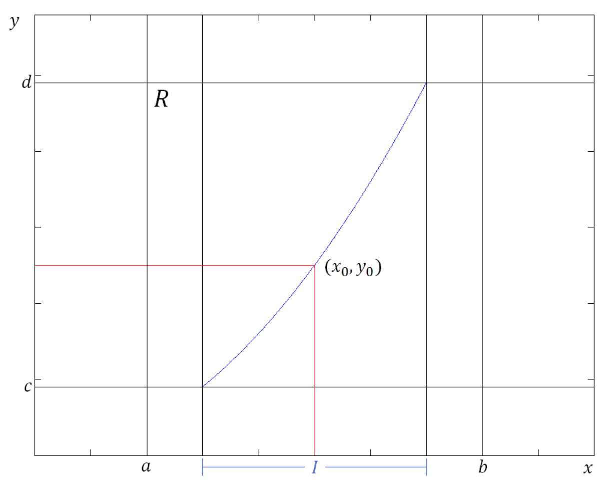
Resumen

Teorema de Existencia y Unicidad[1]

Dado el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Sea R una región rectangular del plano xy, definida por $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, que contiene al punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$. Si $f(x,y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en R, entonces existe un intervalo abiero I, centrado en x_0, y una función única, $y(x)$ definida en I, que satisface el problema de valor inicial expresado por la ecuación (1). A continuación podemos ver la interpretación geométrica del TEU:



El resultado anterior es uno de los teoremas más comunes de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden, ya que es bastante fácil comprobar los criterios de continuidad de $f(x,y)$ y $\partial f/\partial y$.

[1] Definición extraída del libro *Ecuaciones Diferenciales 6ta Ed. - Dennis G. Zill*

Ejercicios

1. TEU. Dadas las siguientes ecuaciones:

a) $2\dfrac{dy}{dx} - 3y = y^3$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y}$

determine (cuando corresponda) todos los puntos donde las ecuaciones pueden tener más de una solución.

Solución

a) Notamos que es un polinomio, por lo tanto es claro que $f(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son continuas, y podemos afirmar que existe una solución única en un intervalo I, centrado en un punto x_0.

b) Definimos $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$, de donde podemos apreciar que la función es continua para cualquier valor. Por lo tanto, podemos afirmar la existencia de alguna solución por todos los puntos (x_0, y_0).

Analizamos unicidad, para eso derivamos f y obtenemos:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}}$$

Claramente tenemos problemas cuando $y = -x^2$, entonces, por TEU podemos afirmar unicidad de solución en todos los puntos no pertenecientes a la parábola $y = -x^2$.

Ahora buscamos las soluciones. Para el caso de un par de puntos (x_0, y_0) que pertenecen a la parábola $y = -x^2$, vamos a tener que $y' = 0$ lo que significa la solución para este caso es $y(x) = C$.

Para un caso en que el par de puntos (x_0, y_0) no esten en la parábola, vamos a poder obtener otra solución al resolver la ecuación planteada. En este caso no es necesario resolver, por lo tanto, asumimos que la solución es de la forma $\varphi(x)$ y concluímos que una segunda familia de curvas está dada por:

$$y' = \sqrt{x^2 + y} \quad \rightarrow \quad y = \varphi(x)$$

2. Exacta. Encuentre todas las familias de curvas $f(x, y)$ que hacen que la ecuación:

$$(x^2y + xy)dy + (xy^2 + yh(y))dx = 0$$

sea exacta, luego resuelva la ecuación.

Solución

Analizamos las condiciones para que la ecuación sea exacta:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 + yh(y)\right) = 2xy + h(y) + yh'(y) \tag{2}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y + xy\right) = 2xy + y \tag{3}$$

Es claro que (2) y (3) tienen que ser iguales para formar una ecuación exacta, por lo tanto, buscamos $h(y)$ que cumpla lo anterior:

$$2xy + h(y) + yh'(y) = 2xy + y$$

$$h'(y) + \frac{1}{y}h(y) = 1$$

Apreciamos que la última ecuación es lineal, donde es trivial obtener el factor integrante. Procedemos a resolver la ecuación:

$$h'(y) + \frac{1}{y}h(y) = 1 \quad / \cdot y$$

$$yh(y) = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + A$$

$$h(y) = \frac{y}{2} + \frac{A}{y} \tag{4}$$

Sabemos que toda familia $h(y)$ de la forma obtenida en (4) sirve para que la ecuación incial sea exacta. Por lo tanto, reemplazamos (4) en $M(x, y)$ y obtenemos que $M(x, y) = xy^2 + y^2/2 + A$.

Ahora, para resolver la ecuación buscamos f según lo visto en la ayudantía 2:

$$f(x,y) = \int \left(xy^2 + y^2/2 + A\right) dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + Ax\right) + g(y) \tag{5}$$

Derivamos (5) con respecto a y y lo igualamos a $N(x,y)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(2x^2y + xy\right) + g'(y) = x^2y + xy$$

Apreciamos que $g'(y) = 0$, por lo tanto, $g(y) = B$, entonces:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + Ax + B = C$$

A la constante $(C - B)$ la vamos a llamar D. Finalmente la solución es:

$$\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + Cx = D$$

3. Intervalos. Dado el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2(x-2)(x+1) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

determine el intervalo de definición (a, b) de la ecuación. Además, calcule $\lim_{t\to a^+} x(t)$ y $\lim_{t\to b^-} x(t)$.

Solución

Resolvemos el PVI, que es una ecuación separable:

$$\frac{dx}{dt} = 2(x-2)(x+1) \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{(x-2)(x+1)} = 2dt$$

Ahora, debemos recordar las soluciones especiales, que en este caso nos van a determinar los puntos donde la función es constante. Claramente estas son:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \\ x(t) &= -1 \end{aligned}$$

Separamos en fracciones parciales y luego integramos:

$$\frac{dx}{(x-2)(x+1)} = 2dt \quad \rightarrow \quad \frac{dx/2}{x-2} - \frac{dx/2}{x+1} = 6dt$$

$$\int \frac{dx/2}{x-2} - \int \frac{dx/2}{x+1} = \int 6\,dt \quad \rightarrow \quad \frac{x-2}{x+1} = Ae^{6t}$$

Aplicamos la condición inucial $x(0) = 0$ y obtenemos que $A = -2$. Reemlazamos el valor de A y continuamos con la resolución:

$$\frac{x-2}{x+1-(x-2)} = \frac{-2e^{6t}}{1+2e^{6t}} \quad \rightarrow \quad \frac{x-2}{3} = -\frac{2}{2+e^{-6t}}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x(t) = 2 - \frac{6}{2+e^{-6t}}$$

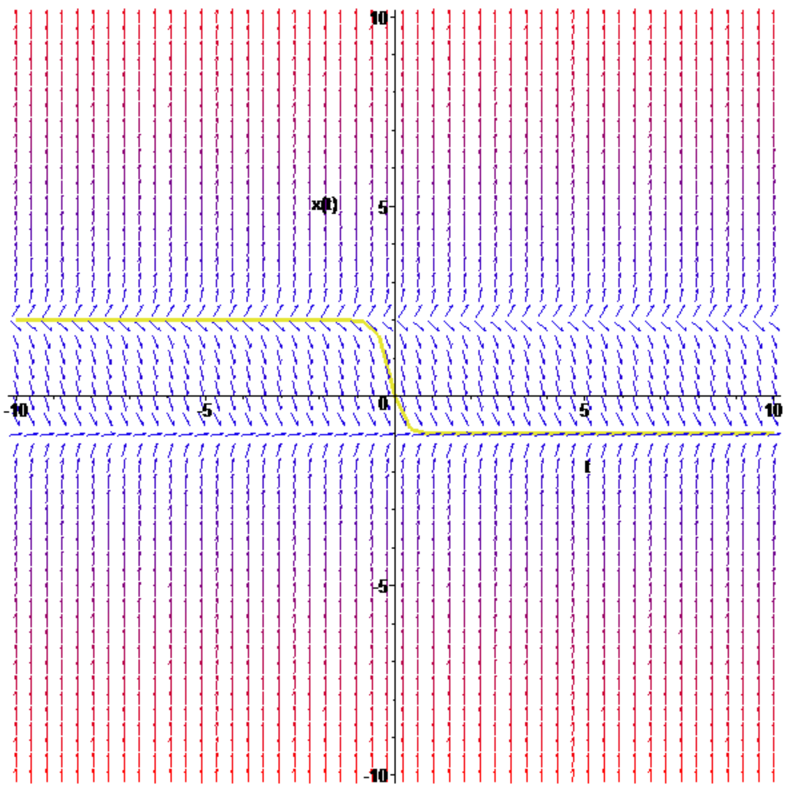
Ahora, analizamos el intervalo de definición del PVI. Lo primero que notamos es que $x(t)$ está acotado entre -1 y 2. Es decir, cuando $t \to +\infty$ $x(t) = -1$ y cuando $t \to -\infty$ $x(t) = 2$. Formalmente:

$$I_{(a,b)} = (-\infty, \infty)$$

$$\lim_{t \to a^+} x(t) = \lim_{t \to -\infty} 2 - \frac{6}{2 + e^{-6t}} = 2$$

$$\lim_{t \to b^-} x(t) = \lim_{t \to +\infty} 2 - \frac{6}{2 + e^{-6t}} = -1$$

Finalmente, presentamos un gráfico del ejercicio:



Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
4 de Abril de 2011

Ayudantía Nº 5 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

PREPARACIÓN I1

Ejercicios

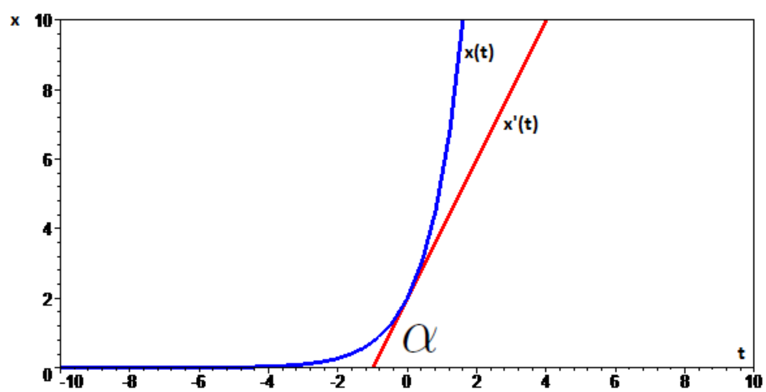
1. Familia de curvas. En el ejercicio 2 de la ayudantía 1 se tenía que buscar una una familia perpendicular a la familia $x(t) = Ae^t$, con la condición inicial $x(0) = 2$. Ahora, se pide que encuentre una expresión para la familia de curvas que intersectan a la familia $x(t) = Ae^t$ con condición inicial $x(0) = 2$ en un ángulo arbitrario γ. Luego evalúe la expresión para encontrar una intersección de $\pi/4$.

Hint:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

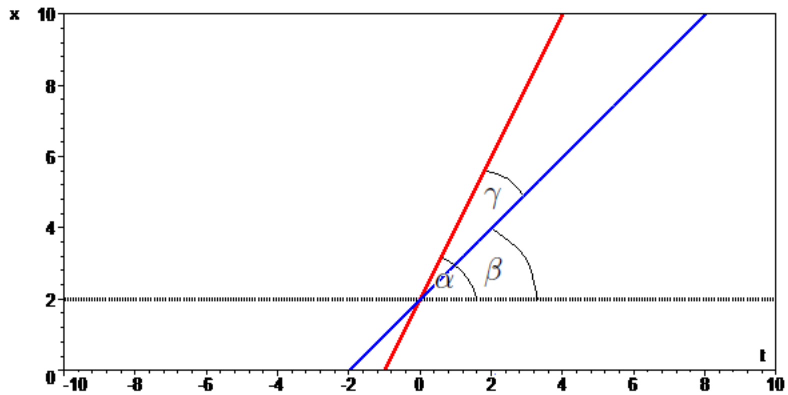
Solución

Tal como se encontró en el ejercicio 2 de la ayudantía 1, podemos deducir que $x'(t) = x(t)$. Planteamos un gráfico para poder analizar mejor la situación:



Imponemos que el ángulo que forme la pendiente de la curva sea α. Entonces a partir de eso, es fácil notar que la pendiente está dada por $\tan(\alpha)$. Además, sabemos que $x'(t) = x(t)$, por lo tanto, $x(t) = \tan(\alpha)$.

Ahora, vemos que tiene que pasa con las pendientes de las 2 familias, por eso, vamos a hacer un gráfico de lo que necesitamos:



Ya tenemos que $x(t) = \tan(\alpha)$, línea roja, deducimos que la línea azul tiene que ser $x'(t) = \tan(\beta)$. Así se cumple que $\gamma = \alpha - \beta$. Ocupamos el *hint*:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} \quad \rightarrow \quad \tan(\gamma) = \frac{x(t) - x'(t)}{1 + x(t) \cdot x'(t)}$$

$$x'(t) = \frac{x(t) - \tan(\gamma)}{x(t) \cdot \tan(\gamma) + 1}$$

La ecuación anterior es separable:

$$\frac{x(t) \cdot \tan(\gamma) + 1}{x(t) - \tan(\gamma)} dx(t) = dt \quad \rightarrow \quad \tan(\gamma) \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan(\gamma)} \cdot \frac{\tan^2(\gamma) + 1}{x(t) - \tan(\gamma)}\right) dx(t) = dt$$

Integramos:

$$\tan(\gamma) \cdot \left(x(t) + \frac{\tan^2(\gamma) + 1}{\tan(\gamma)} \cdot \ln[x(t) - \tan(\gamma)]\right) = t + C$$

La familia de curvas que intersecta en un ángulo α es:

$$\tan(\gamma) \cdot x(t) + \csc^2(\gamma) \cdot \ln[x(t) - \tan(\gamma)] = t + C$$

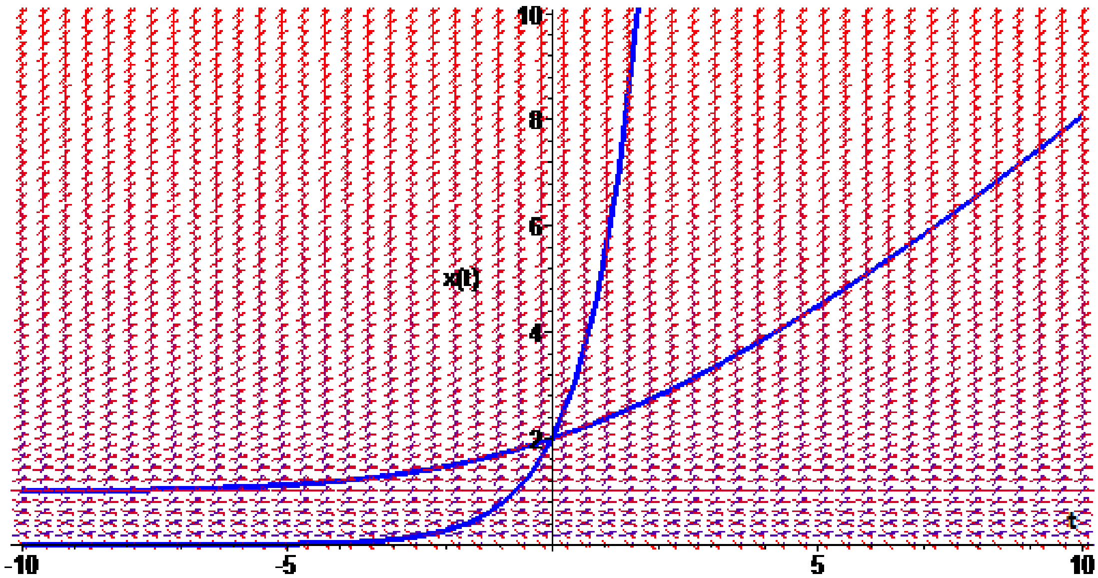
Entonces, para buscar un ángulo de intersección de $\pi/4$ simplemente debemos reemplazar $\gamma = \pi/4$:

$$x(t) + 2\ln[x(t) - 1] = t + C$$

Reemplazando la condición inicial obtenemos:

$$x(t) + 2\ln[x(t) - 1] = t + 2$$

Ahora, vamos a graficar la curva anterior con $x(t) = 2e^t$, que forman un ángulo de $\pi/4$:



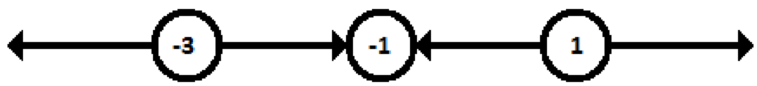
2. Ecuación Autónoma y TEU. Dado el siguiente PVI:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x^2-1)(e^x+1)(x+3) \\ x(0) = -2 \end{cases}$$

determine los puntos de equilibrio y clasifíquelos. Luego, haga un gráfico de la solución del PVI y además, calcule $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.

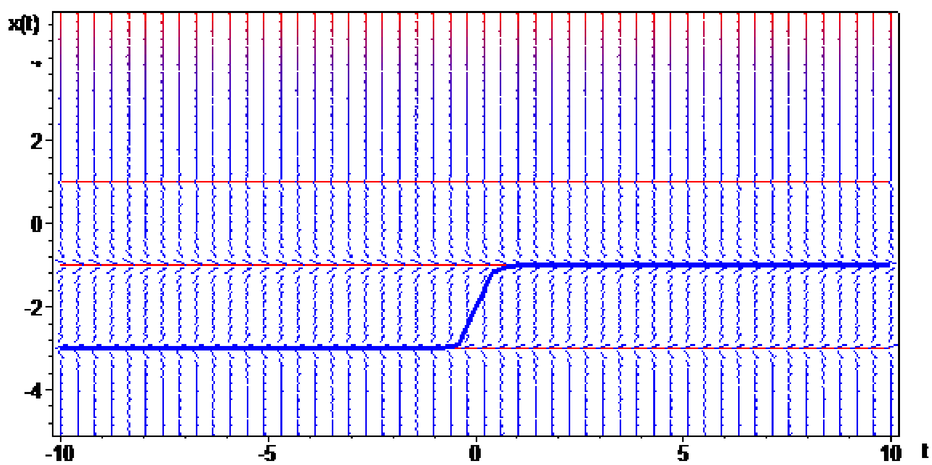
Solución

Los puntos de equilibrio son aquellos en los que $x'(t) = 0$. Del primer término tenemos $x(t) = -1$ y $x(t) = 1$, luego $e^x + 1 \neq 0$ en $\mathbb{R}$ y siempre mayor que cero, finalmente del último término tenermos $x(t) = -3$. Ahora, vamos a plantear las líneas de fase para ver como se comporta $x'(t)$:



De lo anterior podemos apreciar que $x(t) = -3$ es un repulsor o fuente(inestable), $x(t) = -1$ es un atractor o sumidero(estable), y por último $x(t) = 1$ es nuevamente un punto de equilibrio inestable.

Ahora gráficamos $x(t)$ considerando la condición inicial:



Viendo el gráfico y aplicando el TEU, podemos afirmar que la solución encontrada es única en R, una región rectangular del plano xy, definida por $[-\infty, \infty] \times [-3, -1] \subset \mathbb{R}^2$, que contiene al punto $(0, -2) \in \mathbb{R}$. Finalmente, es claro que los límites pedidos son:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = -1$$

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = -3$$

3. Factor integrante. Resolver:

$$(6xy^3 + 8x^3y^5)dx + (5x^2y^2 + 7x^4y^4)dy = 0$$

ocupando un factor integrante de la forma $u(x^2y)$.

Solución

Como debemos ocupar el factor integrante, podemos definir $M^* = uM$ y $N^* = uN$. De lo anterior, es claro que si ocupamos el lema de Schwartz vamos a tener $(uM)_y = (uN)_x$.

$$\rightarrow \quad u_yM + uM_y = u_xN + uN_x$$

donde $u_x = u' \cdot 2xy$ y $u_y = u' \cdot x^2$.

Reemplazamos lo que encontramos en la última ecuación:

$$u'(6x^3y^3 + 8x^5y^5) + u(18xy^2 + 40x^3y^4) = u'(10x^3y^3 + 14x^5y^5) + u(10xy^2 + 28x^3y^4)$$

$$u'(4x^3y^3 + 6x^5y^5) = u(8xy^2 + 12x^3y^4)$$

$$u'\frac{2x^3y^3(2 + 3x^2y^2)}{4xy^2(2 + 3x^2y^2)} = u$$

Está ecuación es separable. Por otro lado, como debemos integrar con respecto a x^2y hacemos un cambio de variable para que sea más claro:

$$u' \cdot x^2y = 2u \quad \rightarrow \quad u' \cdot r = 2u$$

$$\frac{du}{u} = 2\frac{dr}{r} \quad \rightarrow \quad u = r^2$$

$$\therefore\ u(x^2y) = x^4y^2$$

Planteamos la ecuación encontrada:

$$(6x^5y^5 + 8x^7y^7)dx + (5x^6y^4 + 7x^8y^6)dy = 0$$

Nunca está de más comprobar que la ecuación encontrada sea efectivamente una ecuación exacta. Ocupamos el Lema de Schwartz para comprobar lo anterior:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 30x^5y^4 + 56x^7y^6 \tag{1}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 30x^5y^4 + 56x^7y^6 \tag{2}$$

(1) y (2) son iguales, por lo tanto, el factor integrante que encontramos era el correcto.

Ahora, para resolver la ecuación buscamos f:

$$f(x,y) = \int \left(6x^5y^5 + 8x^7y^7\right) dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \left(x^6y^5 + x^8y^7\right) + g(y) \tag{3}$$

Derivamos (3) con respecto a y y lo igualamos a $N(x,y)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(5x^6y^4 + 7x^8y^6\right) + g'(y) = 5x^6y^4 + 7x^8y^6$$

Apreciamos que $g'(y) = 0$, por lo tanto, $g(y) = B$, entonces:

$$f(x,y) = x^6y^5 + x^8y^7 + B = A$$

A la constante $(A - B)$ la vamos a llamar C. Finalmente la solución es:

$$x^6y^5 + x^8y^7 = C$$

4. Mezcla de sustancias. Dos sustancias químicas A y B reaccionan para formar una nueva sustancia C. La formación de 7 kg. de C requiere de 5 kg. de A y 2 kg. de B. Suponga que inicialmente hay 70 kg. de A, 30 kg. de B, 0 kg. de C y que 1 hora más tarde se han formado 10 kg. de C. Determine la cantidad de C que se ha formado hasta el instante t (en horas).

Solución

Ocupamos el modelo para reacciones químicas:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k\left(A_0 - \frac{a_0}{c_0}x(t)\right)\left(B_0 - \frac{b_0}{c_0}x(t)\right) \tag{4}$$

Ahora, debemos reconocer los parámetros:

- Cantidad inicial de A: $A_0 = 70$kg.
- Cantidad inicial de B: $B_0 = 30$kg.
- Cantidad de sustancia A que se requiere para la reacción: $a_0 = 5$kg.
- Cantidad de sustancia B que se requiere para la reacción: $b_0 = 2$kg.
- Cantidad de sustancia C que se forma por la reacción: $c_0 = 7$kg.

Además, tenemos las siguientes condiciones:

- Condición Inicial: $x(0) = 0$kg.
- Condición Adicional: $x(1) = 10$kg.

Planteamos el modelo ocupando (3):

$$\frac{dx(t)}{dt} = k\left(70 - \frac{5}{7}x(t)\right)\left(30 - \frac{2}{7}x(t)\right)$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{10}{49}k(98 - x(t))(105 - x(t))$$

Es claro que es una ecuación separable y que debemos ocupar fracciones parciales antes de integrar:

$$\frac{dx(t)}{(98 - x(t))(105 - x(t))} = \frac{10}{49}kdt$$
$$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{98 - x(t)} - \frac{1}{105 - x(t)}\right)dx(t) = \frac{10}{49}kdt$$

Integramos:

$$\ln\left|\frac{105-x(t)}{98-x(t)}\right| = \frac{10}{7}kt + C$$

$$\frac{105-x(t)}{98-x(t)} = Ae^{\frac{10}{7}kt}$$

Ocupamos las condiciones del modelo. Cabe destacar que primero debemos ocupar la condición inicial para determinar A y luego la condición adicional para determinar k.

$x(0) = 0$:

$$\frac{105-0}{98-0} = Ae^{\frac{10}{7}k\cdot 0} \quad \rightarrow \quad A = \frac{105}{98}$$

$x(1) = 10$:

$$\frac{105-10}{98-10} = \frac{105}{98}e^{\frac{10}{7}k\cdot 1} \quad \rightarrow \quad k = \frac{7}{10}\ln\left(\frac{133}{132}\right)$$

Reemplazamos los datos obtenidos:

$$\frac{105-x(t)}{98-x(t)} = \frac{105}{98}e^{\ln\left(\frac{133}{132}\right)t}$$

$$\rightarrow \quad \frac{105-x(t)}{98-x(t)-[105-x(t)]} = \frac{105e^{\ln\left(\frac{133}{132}\right)t}}{98-\left[105e^{\ln\left(\frac{133}{132}\right)t}\right]}$$

Sólo falta despejar $x(t)$:

$$x(t) = 105 + 7\frac{105e^{\ln\left(\frac{133}{132}\right)t}}{98-105e^{\ln\left(\frac{133}{132}\right)t}}$$

$$\rightarrow \quad x(t) = 98\cdot 105\frac{1-e^{\ln\left(\frac{133}{132}\right)t}}{98-105e^{\ln\left(\frac{133}{132}\right)t}}$$

Finalmente la cantidad C es:

$$x(t) = 10290\frac{1-e^{\ln\left(\frac{133}{132}\right)t}}{98-105e^{\ln\left(\frac{133}{132}\right)t}} = 10290\frac{132^t-133^t}{98\cdot 132^t-105\cdot 133^t}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
`fnyanez@uc.cl`
11 de Abril de 2011

Ayudantía Nº 6 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR I

Resumen

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Una ecuación lineal de orden superior es de la siguiente forma:

$$a_n(x)\,\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{dy(x)}{dx} + a_0(x)\,y(x) = g(x)$$

Para nuestro estudio, nos conviene escribirla así:

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + b_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + b_1(x)\,\frac{dy(x)}{dx} + b_0(x)\,y(x) = h(x) \tag{1}$$

Debemos recordar que una ecuación de orden n está sujeta a n condiciones iniciales:

$$\frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}} = y_{n-1} \qquad \frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-2}} = y_{n-2} \qquad \ldots \qquad \frac{y(x_0)}{dx} = y_1 \qquad y(x_0) = y_0$$

Pincipio de Superpisoción

Para una ecuación lineal homogénea de orden n, ec. (1) con $h(x) = 0$, que tiene soluciones

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_k(x)$$

se puede afirmar que la combinación lineal

$$y(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) + \ldots + c_k\,y_k(x)$$

es solución a la ecuación (1), donde c_1, c_2, ... , c_k son constantes arbitrarias.

Clasificación

A partir de (1), podemos hacer las siguientes distinciones:

- Homogeneidad: Básicamente si $h(x) = 0$ se habla de una ecuación homogénea y si $h(x) \neq 0$ se habla de una ecuación no homogénea.

- Constantividad de Coeficientes: Si todos los términos $b_i(x)$ no dependen de x se habla de una ecuación de coeficientes constantes, por otro lado, si existe algún término $b_i(x)$ que dependa de x, se habla de una ecuación de coeficientes no constantes.

Por lo tanto, a partir de lo anterior podemos clasificarlas 4 tipos de ecuaciones diferenciales como muestra el siguiente dibujo:

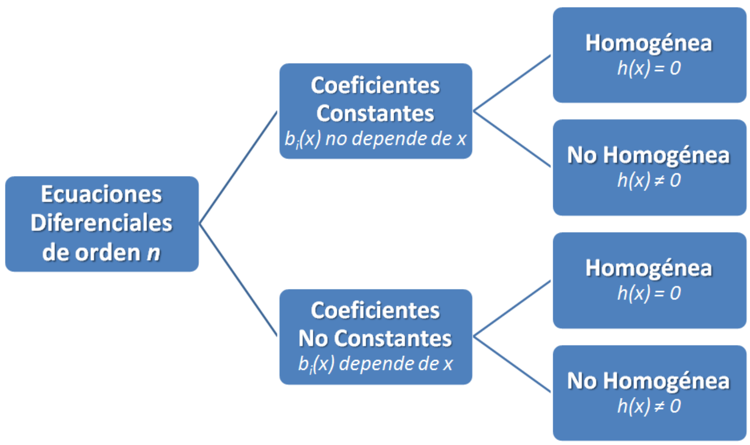


Figura 1: Clasificación ecuaciones diferenciales de orden superior.

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

A partir de (1), podemos hacer las siguientes distinciones:

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + b_{n-1}\ \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + b_1\ \frac{dy(x)}{dx} + b_0\ y(x) = 0 \tag{2}$$

Método de solución: Operador D

La idea es escibir la ecuación diferencial ocupando operadores diferenciales. Donde un operador diferencial D^k reemplaza el término d^k/dx^k de la ecuación. Por lo tanto, la ecuación (2) se puede escribir de la siguiente forma:

$$D^n y(x) + b_{n-1}\ D^{n-1} y(x) + \ldots + b_1\ Dy(x) + b_0\ y(x) = 0$$

Ahora, tenemos una ecuación algebráica y por eso, nos conviene escribirla como un producto de sumas y así poder ver claramente que terminos anulan la ecuación. En otras parablas, la idea es factorizar la ecuación y expresarla solamente en terminos de factores de la forma $(D - c)$ o de la forma $(D^2 - 2aD + a^2 b^2)$.

Teniendo claro lo anterior, debemos recordar que una ecuación diferencial de orden n tiene n soluciones L.I., por lo tanto, un término $(D - c)^k$ nos va a entregar k soluciones y un término $(D^2 - 2aD + a^2 b^2)^k$ nos va a entregar $2k$ soluciones.

Ocupando el principio de superposición, podemos apreciar que una combinación lineal de cada solución de (2) también es solución. Finalmente, podemos apreciar que el aporte de soluciones de cada término, esá dado por:

$$(D - c)^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_i x^i e^{cx} \tag{3}$$

$$(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)^k = \sum_{i=0}^{k-1} x^i e^{ax} \cdot [A_i \cos(bx) + B_i \sin(bx)] \tag{4}$$

Ejercicios

1. Ejemplo I. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$2\frac{d^3x(t)}{dt^3} + 18\frac{dx(t)}{dt} = 0$$

Solución

Escribimos $P(D) = 0$, donde $P(D)$ es el polinomio de operadores diferenciales:

$$D^3x(t) + 9Dx(t) = 0 \quad \rightarrow \quad (D^3 + 9D)x(t) = 0 \quad \rightarrow \quad D(D^2 + 9)x(t) = 0$$

$$\therefore \quad P(D) = D(D^2 + 9)$$

Vemos el aporte de cada solución:

- $(D - 0) \quad \rightarrow \quad C_0 + C_1 t$
- $(D^2 - 2 \cdot (0) \cdot D + (0)^2 + 3^2) \quad \rightarrow \quad A_0 \cos(3t) + B_0 \sin(3t)$

Por último, la solución de la ecuación está dada por una combinación lineal de las soluciones individuales. Esto significa que la solución homogénea es:

$$y_H = C_0 + C_1 t + C_2 \cos(3t) + C_3 \sin(3t)$$

2. Ejemplo II. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^5y(x)}{dx^5} + 3\frac{d^4y(x)}{dx^4} - \frac{d^3y(x)}{dx^3} - 5\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 4\frac{dy(x)}{dx} + 6y(x) = 0$$

Solución

Lo primero que debemos hacer es escribir la ecuación en base a operadores diferenciales:

$$D^5y(x) + 3D^4y(x) - D^3y(x) - 5D^2y(x) - 4Dy(x) + 6y(x) = 0$$

$$\underbrace{(D^5 + 3D^4 - D^3 - 5D^2 - 4D + 6)}_{\clubsuit} y(x) = 0$$

Ahora debemos factorizar $\clubsuit$. Cuando tenemos un polinomio que no tiene una factorización evidente, tratamos de ver si números simples (0,1,-1) son soluciones de la ecuación. En este caso es evidente que $D = 0$ no es solución, por eso tratamos con $D = 1$:

$$(1^5 + 3 \cdot 1^4 - 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6)y(x) = 0$$

$D = 1$ cumple lo anterior, por lo tanto, tenemos:

$$(D - 1)(D^4 + 4D^3 + 3D^2 - 2D - 6)y(x) = 0$$

Intentamos nuevamente con $D = 1$ y obtenemos:

$$(D - 1)^2 \underbrace{(D^3 + 5D^2 + 8D + 6)}_{\spadesuit} y(x) = 0$$

Claramente un factor de $\spadesuit$ tiene que ser de la forma $(D + c)$ con $c > 0$. Intentamos con $(D + 1)$ y $(D + 2)$, notando que no cumplen la ecuación. Ahora, intentamos con $(D + 3)$ y obtenemos:

$$(D - 1)^2(D + 3) \underbrace{(D^2 + 2D + 2)}_{\diamondsuit} y(x) = 0$$

Debemos comprobar si $\diamondsuit$ es un polinomio irreducible o debemos seguir factorizando. Para eso ocupamos el citerio de Einstein para $p = 2$:

- $p = 2$, divide a a_1 y a_0.
- $p = 2$, no divide a a_2.
- $p^2 = 4$, no divide a a_0.

Por lo tanto, $\diamondsuit$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}$. Otra opción era analizar el discriminante de $\diamondsuit$ y notar que es menor que cero.

Ahora, procedemos a ver el aporte de cada solución:

- $(D-1)^2 \quad \rightarrow \quad C_0 e^x + C_1 x e^x$
- $(D-(-3)) \quad \rightarrow \quad C_2 e^{-3x}$
- $(D^2 - 2 \cdot (-1) \cdot D + (-1)^2 + 1^2) \quad \rightarrow \quad e^{-x} \cdot [A_0 \cos(x) + B_0 \sin(x)]$

Finalmente, sabemos que la solución está dada por una combinación lineal de las soluciones individuales, por lo tanto, la solución homogénea es:

$$y_H = C_0 e^x + C_1 x e^x + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{-x} \cos(x) + C_4 e^{-x} \sin(x)$$

3. Ejemplo III. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^4x(t)}{dt^4} - 2\frac{d^3x(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} - 5x(t) = 0$$

sabiendo que $x(t) = e^t \sin(2t)$ es una solución.

Solución

A partir de la solución dada, podemos inferir que:

$$(D^2 - 2 \cdot (1) \cdot D + (1)^2 + 2^2) \quad \rightarrow \quad e^t \cdot [a_0 \cos(2t) + b_0 \sin(2t)]$$

A la solución encontrada la llamaremos $Q(D)$, es decir:

$$Q(D) = D^2 - 2D + 5$$

Por otro lado, el polinomio de la ecuación es:

$$P(D) = D^4 - 2D^3 + 4D^2 + 2D - 5$$

Para buscar el resto de las soluciones, podemos tratar de factorizar $P(D)$ como en los ejercicios anteriores. Otra forma es buscar el cuociente entre $P(D)$ y $Q(D)$:

$$(D^4 - 2D^3 + 4D^2 + 2D - 5) : (D^2 - 2D + 5) = D^2 - 1$$

Por lo tanto, tenemos que $P(D)$ es:

$$P(D) = (D^2 - 2D + 5)\underbrace{(D-1)(D+1)}_{\clubsuit}$$

De ♣ podemos notar que los aportes de soluciones es:

$$c_0 e^t \;\; y \;\; c_1 e^{-t}$$

Finalmente la solución es:

$$x(t) = e^t \cdot [a_0 \cos(2t) + b_0 \sin(2t) + c_0] + c_1 e^{-t}$$

4. Ejemplo IV. Considere la función $h(t) = 6t^2 + t + e^{-2t}$. Se pide que encuentre una ecuación diferencial homogénea de cuarto orden que contenga a $h(t)$ en su solución.

Solución

Lo primero que debemos hacer es ver que factores (3), (4) forman $h(t)$. Sólo como aviso previo que lo que vamos a buscar ahora, vamos a llamarlo aniquilador en la próxima ayuantía.

Encontramos 3 términos que forman $h(t)$, una combinación lineal. Por lo tanto, sólo debemos hacer el procedimiento inverso de que lo que hemos hecho en los ejercicios anteriores:

- $6t^2: \quad (D-0)^3 \quad \rightarrow \quad a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
- $t: \quad (D-0)^2 \quad \rightarrow \quad b_0 + b_1 t$
- $e^{-2t}: \quad (D-(-2)) \quad \rightarrow \quad Ae^{-2t}$

Ahora debemos escribir el polinomio de operadores diferenciales. Recordamos que la ecuación debe ser de cuarto orden y que las soluciones aportadas por D^2 están contenidas en D^3. Por lo tanto, el polinmio requerido es:

$$P(D) = D^3(D+3)$$

Finalmente la ecuación pedida es:

$$\frac{d^4x(t)}{dt^4} + 3\frac{d^3x(t)}{dt^2} = 0$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
18 de Abril de 2011

Ayudantía Nº 7 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR II

Resumen

Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes

A partir de la definición de ecuaciones de orden superior podemos escribir:

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + b_{n-1}\,\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + b_1\,\frac{dy(x)}{dx} + b_0\,y(x) = h(x) \tag{1}$$

Es claro que la solución de este tipo de ecuaciones es de la forma: $y = y_H + y_P$, donde y_H se obtiene con el método del operador D. Ahora vamos a proponer un método para encontrar y_P.

Método de solución: Coeficientes Indeterminados

Como se mencionó en la ayudantía anterior, la idea para la resolución de este tipo de ecuaciones es buscando el *aniquilador* de $h(x)$[1]. El *aniquilador* de una función es un polinomio de operadores diferenciales de orden m, que anula a la función en cuestión.

Luego de determinar el aniquilador de $h(x)$, multiplicamos la ecuación por ese aniquilador. Así el aniquilador transforma la ecuación lineal no homogénea de orden n en una ecuación homogénea de orden $n{+}m$. Hay que mencionar que al resolver esta nueva ecuación homogénea estamos buscando la solución particular, además, al resolver una ecuación diferencial lineal homogénea de orden $n{+}m$, tendrá m constantes de integración más de las necesarias. Por lo tanto, las constantes asociadas a la ecuación homogénea no se consideran, porque ya estan consideradas en esa solución.

Este método nos sirve para determinar sólo la forma que debe tener la solución particular. Para determinar los coeficientes de la solución particular, se sustituye la solución particular y así obtenemos un sistema de $m \times m$ ecuaciones lineales, cuya solución nos va a permitir encontrar las m constantes en cuestión.

NOTA: La mejor forma para entender este método es revisar un ejercicio.

[1] Cabe destacar que sólo podemos aplicar este método cuando $h(x)$ es un polinomio, exponencial o sinusoide, ya que para otras funciones no tenemos un aniquilador conocido.

Ecuaciones homogéneas con coeficientes no constantes

Método de solución: Reducción de Orden

Supongamos que tenemos una ecuación de la sigueinte forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

Y sabemos que una solución a esa ecuación es: $y = y_1(x)$. Además, una ecuación de segundo orden tiene dos soluciones, por lo tanto, podemos inferir la segunda solución a partir de la primera. Es decir, suponemos que y_2 es de la forma: $y = u(x)y_1(x)$. De lo anterior podemos inferir que:

$$y' = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)$$

$$y'' = u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) \tag{3}$$

Entonces como (3) es solución de (2) podemos reemplazar y obtener lo siguiente:

$$u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) + P(x)[u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)] + Q(x)u(x)y_1(x) = 0$$

$$u''(x)y_1(x) + u'(x)[2y_1'(x) + P(x)y_1(x)] + u(x)\underbrace{[y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)]}_{0} = 0$$

$$u''(x)y_1(x) + u'(x)[2y_1'(x) + P(x)y_1(x)] = 0 \tag{4}$$

Hacemos un cambio de variable, $v = u'$ y reemplazamos:

$$v'(x)y_1(x) + v(x)[2y_1'(x) + P(x)y_1(x)] = 0$$

Ahora tenemos una ecuación separable que sabemos como resolver. Realice el procedimiento y obtendrá:

$$v(x) = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}$$

Luego, debemos recordar que $v = u'$ y que $u = y/y_1$. Nuevamente, si realiza el procedimiento, obtendrá y_2:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx \tag{5}$$

Ejercicios

1. Coeficientes Indeterminados I. Resuelva:

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 3\sin(x) + x^2$$

es decir, encuentre la solución homogénea y luego la particular.

Solución

Comenzamos buscando la solución homogénea, ocupando el método del operador D:

$$(D^2 + 5D + 6)y_H(x) = 0$$

$$P(D) = D^2 + 5D + 6 = (D + 2)(D + 3)$$

$$\rightarrow \quad y_H(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

Ahora buscamos la solución particular. Para eso, ocupamos el método de coeficientes indeterminados. Comenzamos buscando el aniquilador de $h(x) = 2x + 3\sin(x) + x^2$:

$$D^3 \quad \rightarrow \quad A, Bx, Cx^2$$

$$(D^2 + 1) \quad \rightarrow \quad D\cos(x), E\sin(x)$$

Cabe destacar que el aniquilador de $2x + x^2$ es D^3. Se podría haber considerador que el aniquilador para $2x$ es D^2 y el de x^2 es D^3, pero el lector puede comprobar facilmente que es un camino más largo para llegar al mismo resultado.

Por lo tanto, el aniquilador de $h(x)$ es $D^3(D^2 + 1)$. Si aplicamos esto a la ecuación, vamos a tener:

$$D^3(D^2 + 1)\underbrace{(D + 2)(D + 3)}_{L.D.}y_P(x) = 0$$

Claramente hay un termindo que está contenido en la ecuación homogénea, que calculamos anteriormente. Por lo tanto, no la consideramos en esta parte. Procedemos a reemplazar y_P en la ecuación inicial, por eso comenzamos derivando la solución:

$$\begin{aligned}
y_P(x) &= A + Bx + Cx^2 + D\cos(x) + E\sin(x) \quad / \cdot 6 \\
y'_P(x) &= B + 2Cx - D\sin(x) + E\cos(x) \quad / \cdot 5 \\
y''_P(x) &= 2C - D\cos(x) - E\sin(x) \quad / \cdot 1
\end{aligned}$$

Ahora buscamos los valores de las constantes. Debemos reemplazar lo obtenido anteriormente en la ecuación inicial. Para eso una buena opción es ver los coeficietes de cada térimo:

$$\begin{aligned}
x^2 &: \quad 6C = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{C = 1/6}} \\
x &: \quad 10C + 6B = 2 \quad \rightarrow \quad 3B = 1 - 5/6 \qquad \boxed{\text{B = 1/18}} \\
1 &: \quad 2C + 5B + 6A = 0 \quad \rightarrow \quad 6A = -2/6 - 5/18 \qquad \boxed{\text{A = -11/108}} \\
\cos(x) &: \quad -D + 5E + 6D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -E \\
\sin(x) &: \quad -E + 5D + 6E = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{E = 3/10}} \quad \boxed{\text{D = -3/10}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad y_P(x) = -\frac{11}{108} + \frac{x}{18} + \frac{x^2}{6} - \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{3}{10}\sin(x)$$

Finalmente la solución es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{11}{108} + \frac{x}{18} + \frac{x^2}{6} - \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{3}{10}\sin(x)$$

2. Coeficientes Indeterminados II. Dada la siguiente ecuación:

$$y'' + 4y = e^{-2x} + 3e^{x}\cos(x)$$

encuentre la solución general.

Solución

Partimos buscando la solución homogénea, la que claramente es:

$$y_H(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

Buscamos la solución particular. Aniquilador y aporte de soluciones:

$$(D+2) \quad \rightarrow \quad Ae^{-2x}$$

$$(D^2 - 2D + 2) \quad \rightarrow \quad Be^{x}\cos(x), Ce^{x}\sin(x)$$

El aniquilador del lado derecho de la ecuación es $(D+2)(D^2-2D+2)$. Planteamos y_P y luego procedemos a reemplazar y_P y sus respectivas derivadas en la ecuación inicial:

$$\begin{array}{rcl} y_P(x) & = & Ae^{-2x} + Be^{x}\cos(x) + Ce^{x}\sin(x) \quad / \cdot 4 \\ y_P'(x) & = & -2Ae^{-2x} + Be^{x}\cos(x) - Be^{x}\sin(x) + Ce^{x}\sin(x) + Ce^{x}\cos(x) \quad / \cdot 0 \\ y_P''(x) & = & 4Ae^{-2x} - 2Be^{x}\sin(x) + 2Ce^{x}\cos(x) \quad / \cdot 1 \end{array}$$

Buscamos los valores de las constantes:

$$\begin{array}{rcl} e^{-2x} & : & 4A + 4A = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathrm{A} = 1/8} \\ e^{x}\sin(x) & : & -2B + 4C = 0 \quad \rightarrow \quad B = 2C \\ e^{x}\cos(x) & : & 2C + 4B = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathrm{C} = 3/10} \quad \boxed{\mathrm{B} = 3/5} \end{array}$$

$$\therefore \quad y_P(x) = \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{3}{5}e^{x}\cos(x) + \frac{3}{10}e^{x}\sin(x)$$

Finalmente la solución es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{3}{5}e^{x}\cos(x) + \frac{3}{10}e^{x}\sin(x)$$

3. Reducción de Orden I. Resuelva la siguiente ecuación:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

sabiendo que $y_1 = x^2$ es una solución.

Solución

Primero que todo reescrbimos la ecuación:

$$y'' - 3x^{-1}y' + 4x^{-2}y = 0$$

Apreciamos que $P(x) = -3x^{-1}$ y $Q(x) = 4x^{-2}$. A partir de esto planteamos la ecuación diferencial para u, (4), recordando que $y_2 = uy_1 = ux^2$:

$$u''x^2 + u'[4x - 3x] = 0 \quad \rightarrow \quad u'' + u'/x = 0$$

Cambio de variable, $v = u'$:

$$v' + v/x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad v = 1/x$$

Buscamos u:

$$u' = 1/x \quad \rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad u = \ln|x|$$

Finalmente la segunda solución está dada por:

$$y_2 = x^2 \ln|x|$$

Propuesto: Repita el mismo ejercicio para la ecuación $y'' + 16y = 0$, donde $y_1 = \cos(4x)$. ¿Esperaba la solución encontrada?

4. Reducción de Orden II. Resuelva la siguiente ecuación:

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = 0$$

para $x > 0$.

Solución

Como no sabemos ninguna solución, debemos encontrar una "*al ojo*" y luego aplicar, si es necesario, el método de reducción de orden. Las opciones para encontrar una solución es ocupando x^α ó $e^{\alpha x}$. Dada la estuctura de la ecuación, intentamos con la primera solución.

x^α:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^\alpha \\ y'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\ y''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 6x\alpha x^{\alpha-1} + 6x^\alpha = 0$$

$$[\alpha(\alpha-1) + 6\alpha + 6]x^\alpha = 0$$

Como $x^\alpha \neq 0$, tenemos:

$$\alpha(\alpha-1) + 6\alpha + 6 = 0$$

$$\alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0$$

$$(\alpha+3)(\alpha+2) = 0$$

$$\rightarrow \quad \alpha_1 = -3 \qquad\qquad \alpha_2 = -2$$

Por lo tanto, la solución es:

$$y(x) = C_1x^{-3} + C_2x^{-2}$$

5. Reducción de Orden III. Dada la siguiente ecuación:

$$x^2y'' - x(x+4)y' + 2(x+3)y = 0$$

encuentre la solución homogénea.

Solución

Como no sabemos ninguna solución, debemos encontrar una "*al ojo*". Dada la estuctura de la ecuación, intentamos con x^α.

x^α:

$$y(x) = x^\alpha$$
$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - x(x+4)\alpha x^{\alpha-1} + 2(x+3)x^\alpha = 0$$

$$[\alpha(\alpha-1) - (x+4)\alpha + 2(x+3)]x^\alpha = 0$$

$$[x(2-\alpha) + (\alpha^2 - 5\alpha + 6)]x^\alpha = 0$$

Como $x^\alpha \neq 0$, tenemos:

$$x(2-\alpha) + (\alpha-2)(\alpha-3) = 0$$

La única solución es $\alpha = 2$, por lo tanto sólo tenemos y_1 que es:

$$y_1(x) = x^2$$

Para buscar y_2, ocupamos (5), donde $P(x) = -(1 + 4/x)$:

$$y_2(x) = x^2 \int \frac{e^{(x+4\ln|x|)}}{x^4} dx = x^2 \int e^x \, dx$$

$$\therefore y_2(x) = x^2 e^x$$

Finalmente la solución es:

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^2e^x$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
25 de Abril de 2011

Ayudantía Nº 8 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR III

Resumen

Ecuaciones no homogéneas con no coeficientes constantes

Supongamos que tenemos una ecuación de la sigueinte forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = b(x) \tag{1}$$

Es claro que la solución de este tipo de ecuaciones es de la forma: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, donde $y_H(x)$ se obtiene con el método de reducción de orden. Ahora vamos a proponer un método para encontrar $y_P(x)$.

Método de solución: Variación de Parámetros

Recordamos que la solución de la ecuación homogénea asociada a (1) es de la siguiente forma:

$$y_H(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

Ahora para el caso de la solución particular, intentamos con una solución de esta forma:

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

Derivamos la solución particular:

$$\begin{aligned}
y_P &= C_1y_1 + C_2y_2 \\
y_P' &= C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' \\
y_P'' &= C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2''y_2 + 2C_2'y_2' + C_2y_2''
\end{aligned}$$

Ahora reemplazamos lo obtenido en la ecuación (1):

$$(C_1''(x)y_1(x) + 2C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2''(x)y_2(x) + 2C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)) + \dots$$
$$\dots + P(x)(C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)) + Q(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = b(x)$$

Reescribimos de la siguiente forma:

$$C_1\underbrace{\left[y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)\right]}_{0}+C_2\underbrace{\left[y_2''(x)+P(x)y_2'(x)+Q(x)y_2(x)\right]}_{0}+\dots$$

$$\dots+P(x)\underbrace{\left[C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)\right]}_{\clubsuit}+\frac{d}{dx}\underbrace{\left[C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)\right]}_{\clubsuit}+\underbrace{\left[C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)\right]}_{\spadesuit}=b(x)$$

Dada la última ecuación, asumimos por conveniencia que $\clubsuit$ sea igual a cero. Por lo tanto, vamos a tener que $\spadesuit$ va a ser igual a $b(x)$. Entonces, con estas condiciones podemos formar un sistema lineal de 2×2 de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$$

Este sistema puede ser resuelto con varios métodos aprendidos en Álgebra Lineal, pero se recomienda (por simplicidad) ocupar el métodos de Cramer. Si hacemos eso, vamos a tener:

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} \qquad C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & b(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}$$

Definimos el Wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ como:

$$W=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Además llamamos:

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \qquad W_2(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & b(x) \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, vamos a tener:

$$C_1(x)=\int\frac{W_1}{W}\,dx \qquad C_2(x)=\int\frac{W_2}{W}\,dx$$

Finalmente, la solución particular puede ser escrita de la siguiente forma:

$$y_P(x)=y_1(x)\int\frac{W_1}{W}\,dx+y_2(x)\int\frac{W_2}{W}\,dx$$

Ejercicios

1. Variación de Parámetros. Resolver:

$$xy'' - (x+3)y' + 3y = 3x^2$$

con las siguientes condiciones iniciales: $y(1) = 0$ y $y'(1) = -1$.

Solución

Reescribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$y'' - (1 + 3/x)y' + 3y/x = 3x$$

Entonces, primero debemos encontrar la solución homogénea de la ecuación. Para eso, buscamos una solución "*al ojo*", y luego ocupamos el método de reducción de orden.

Dada la estructura de la ecuación, intentamos con $e^{\alpha x}$:

$$x\alpha^2 e^{\alpha x} - (x+3)\alpha e^{\alpha x} + 3e^{\alpha x} = 0$$

$$e^{\alpha x}[x(\alpha^2 - 1) + 3(1-\alpha)] = 0$$

$$\rightarrow \quad \alpha = 1 \qquad\qquad \therefore y_1(x) = e^x$$

Buscamos $y_2(x)$:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

Donde $P(x) = -(1 + 3/x)$:

$$y_2(x) = e^x \int \frac{e^{(x+3ln|x|)}}{e^{2x}} dx = e^x \int e^{-x} x^3 dx$$

Integramos por partes y obtenemos que:

$$y_2(x) = -(6 + 6x + 3x^2 + x^3)$$

Entonces, tenemos que la solución homogénea es:

$$y_H(x) = Ae^x + B(6 + 6x + 3x^2 + x^3)$$

Ahora buscamos la solución particular ocupando el método de variación de parámetros. Para eso, ocupamos una solución de la siguiente forma:

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)(6 + 6x + 3x^2 + x^3)$$

Planteamos el sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^x & 6 + 6x + 3x^2 + x^3 \\ e^x & 6 + 6x + 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3x \end{bmatrix}$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned} W &= -x^3e^x \\ W_1 &= -3x(6 + 6x + 3x^2 + x^3) \\ W_2 &= 3xe^x \end{aligned}$$

$$C_1(x) = \int \frac{W_1}{W}\, dx = \int (18x^{-2} + 18x^{-1} + 9 + 3x)e^{-x}\, dx = -\frac{3}{x}(6 + 4x + x^2)e^{-x}$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2}{W}\, dx = -\int 3x^{-2}\, dx = \frac{3}{x}$$

$$\therefore y_p(x) = -\frac{3}{x}(6 + 4x + x^2)e^{-x}e^x + \frac{3}{x}(6 + 6x + 3x^2 + x^3)$$

$$\rightarrow \quad y_P(x) = 6 + 6x + 3x^2$$

Y así tenemos que la solución es:

$$y(x) = Ae^x + B(6 + 6x + 3x^2 + x^3) + 6 + 6x + 3x^2$$

Ocupamos las condiciones iniciales.

$y(1) = 0$:

$$y(1) = Ae + B(6 + 6 + 3 + 1) + 6 + 6 + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad Ae + 16B = -15$$

$y'(1) = -1$:

$$y'(1) = Ae + B(6 + 6 + 3) + 6 + 6 = -1 \quad \rightarrow \quad Ae + 15B = -13$$

Resolvemos el sistema y tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A &= 17e^{-1} \\
B &= -2
\end{aligned}
$$

Finalmente la solución es:

$$y(x) = e^{x-1} - (6 + 6x + 3x^2 + 2x^3)$$

2. Aniquilador Desconocido. Resolver:

$$y'' - 2y' + y = e^x \ln(2x)$$

con las siguientes condiciones iniciales: $y(1) = 1$ y $y'(1) = 2$, asumiendo que $x > 0$.

Solución

Primero buscamos la solución homogénea de la ecuación ocupando el método del operador D.

$$P(D) = D^2 - 2D + 1 = (D-1)^2$$

Por lo tanto:

$$y_1(x) = e^x$$
$$y_2(x) = xe^x$$

Entonces, tenemos que la solución homogénea es:

$$y_H(x) = Ae^x + Bxe^x$$

Ahora buscamos la solución particular. En este caso no sabemos el aniquilador del lado derecho de la ecuación, por eso, la mejor opción es ocupar el método de variación de parámetros. Al igual que en el ejercicio anterior, ocupamos una solución de la siguiente forma:

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$$

Planteamos el sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \ln(2x) \end{bmatrix}$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned} W &= e^{2x} \\ W_1 &= -xe^{2x} \ln(2x) \\ W_2 &= e^{2x} \ln(2x) \end{aligned}$$

$$C_1(x) = \int \frac{W_1}{W}\,dx = -\int xe^{2x}\ln(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2\ln(2x) + \frac{x^2}{4}$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2}{W}\,dx = -\int 3x^{-2}\,dx = x\ln(2x) - x$$

$$\therefore y_p(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2\ln(2x) + \frac{x^2}{4}\right)e^x + (x\ln(2x) - x)xe^x$$

$$\rightarrow \quad y_P(x) = \frac{x^2e^x}{4}(2\ln(2x) - 3)$$

Y así tenemos que la solución es:

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + \frac{x^2e^x}{4}(2\ln(2x) - 3)$$

Ocupamos las condiciones iniciales.

$y(0) = 1$:

$$y(0) = A + B\cdot 0 + 0 = 1 \quad \rightarrow \quad A = 1$$

$y'(0) = 2$:

$$y'(0) = A + B + 0 = 2 \quad \rightarrow \quad B = 1$$

Finalmente la solución es:

$$y(x) = (1+x)e^x + \frac{x^2e^x}{4}(2\ln(2x) - 3)$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
16 de Mayo de 2011

Ayudantía Nº 11 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Resumen

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Para resolver sistemas de ecuaciones de $n \times n$ de la forma $X' = AX$, vamos a intentar *desacoplar el sistema*. Esto es escribir A como VDV^{-1}, donde D es una matriz diagonal que contiene los valores propios de A y V es una matriz que en la i-ésima columna contiene el vector propio asociado al i-ésimo valor propio de A. En el caso que la matriz no sea diagonalizable, vamos a escribir A de la forma VJV^{-1}, donde J es la matriz de Jordan y V contiene a lo menos un vector generalizado.

A continuación vamos a encontrar la solución dependiendo de cada caso.

• n Vectores Propios asociados a n Valores Propios

Condiderando el sistema antes mostrado vamos a tener que encontrar los vectores propios de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1 I)v_1 &= \vec{0} \\
(A - \lambda_2 I)v_2 &= \vec{0} \\
\vdots &= \vdots \\
(A - \lambda_n I)v_n &= \vec{0}
\end{aligned}$$

donde todos los vectores propios deben cumplir que $v_i \in ker(A - \lambda_i I)$ con $i = 1..n$.

Lo anterior, es simplemente como buscar los vectores propios asociados a A. Luego, la solución del sistema es[1]:

$$\vec{x}(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

Por lo tanto, el problema se resuce a buscar los valores y vectores propios y luego reemplazar en el resultado anterior.

[1] La demostración de este resultado queda propuesto al lector. Hint: Ocupar un cambio de variable de la forma $\vec{x} = V\vec{y}$

• $n-1$ **Vectores Propios asociados a** n **Valores Propios**

En este caso vamos a tener sólo $n-1$ vectores propios LI, para n valores propios. Por lo tanto debemos encontrar un vector propio generalizado. Si tenemos que buscar un vector propio generalizado, significa que la matriz A no es diagonalizable y por lo tanto vamos a tener que ocupar una matriz de Jordan de la siguiente forma:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} \end{bmatrix}$$

A partir de lo anterior, escribimos las condiciones para los vectores propios:

$$\begin{aligned} (A-\lambda_1 I)v_1 &= \vec{0} \\ (A-\lambda_2 I)v_2 &= \vec{0} \\ \vdots &= \vdots \\ (A-\lambda_{n-1} I)v_{n-1} &= \vec{0} \\ (A-\lambda_{n-1} I)v_n &= v_{n-1} \end{aligned}$$

Reescribimos la última ecuación, multiplicandola por $(A-\lambda_{n-1}I)$. Así obtenemos:

$$(A-\lambda_n I)^2 v_n = (A-\lambda_{n-1} I)v_{n-1} = \vec{0}$$

Entonces, las condiciones para los vectores propios se reducen a:

$$\begin{aligned} (A-\lambda_1 I)v_1 &= \vec{0} \\ (A-\lambda_2 I)v_2 &= \vec{0} \\ \vdots &= \vdots \\ (A-\lambda_{n-1} I)v_{n-1} &= \vec{0} \\ (A-\lambda_{n-1} I)^2 v_n &= \vec{0} \end{aligned}$$

donde los vectores propios deben cumplir que $v_i \in ker(A-\lambda_i I)$ con $i = 1..n-1$, y $v_n \in ker(A-\lambda_{n-1}I)^2$, pero $v_n \notin ker(A-\lambda_{n-1}I)$.

Finalmente, la solución para este caso es:

$$\vec{x}(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{n-1} v_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t} + c_n (v_n + v_{n-1} t) e^{\lambda_n t}$$

- $n-2$ **Vectores Propios asociados a** n **Valores Propios**

Para este caso, nuevamente ocupamos la matriz de Jordan, y los vectores propios deben cumplir:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_1 I)v_1 &= \vec{0} \\
(A-\lambda_2 I)v_2 &= \vec{0} \\
\vdots &= \vdots \\
(A-\lambda_{n-2} I)v_{n-2} &= \vec{0} \\
(A-\lambda_{n-2} I)v_{n-1} &= v_{n-2} \\
(A-\lambda_{n-2} I)v_{n} &= v_{n-1}
\end{aligned}$$

Aplicando el mismo argumento que en el caso anterior, podemos reescribir las condiciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_1 I)v_1 &= \vec{0} \\
(A-\lambda_2 I)v_2 &= \vec{0} \\
\vdots &= \vdots \\
(A-\lambda_{n-2} I)v_{n-2} &= \vec{0} \\
(A-\lambda_{n-2} I)^2 v_{n-1} &= \vec{0} \\
(A-\lambda_{n-2} I)^3 v_{n} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

donde los vectores propios deben cumplir que $v_i \in ker(A-\lambda_i I)$ con $i = 1..n-2$, $v_{n-1} \in ker(A-\lambda_{n-1}I)^2$, pero $v_{n-1} \notin ker(A-\lambda_{n-1}I)$ y $v_n \in ker(A-\lambda_{n-1}I)^3$, pero $v_n \notin ker(A-\lambda_{n-1}I)^2$ ni $v_n \notin ker(A-\lambda_{n-1}I)$.

Finalmente la solución va a estar determinada por:

$$\vec{x}(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_{n-2} v_{n-2} e^{\lambda_{n-2} t} + c_{n-1}(v_{n-1} + v_{n-2} t) e^{\lambda_{n-2} t} + c_n \left(v_n + v_{n-1} t + v_{n-2} \frac{t^2}{2} \right) e^{\lambda_{n-2} t}$$

- 1 **Vector Propio asociado a n Valores Propios**

El procedimiento anterior se puede seguir realizando hasta llegar a este caso, donde las condiciones reescritas son:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)v_1 &= \vec{0} \\
(A-\lambda I)^2 v_2 &= \vec{0} \\
\vdots &= \vdots \\
(A-\lambda I)^{n-1} v_{n-1} &= \vec{0} \\
(A-\lambda I)^n v_n &= \vec{0}
\end{aligned}$$

donde los vectores propios deben cumplir que $v_1 \in ker(A-\lambda I)$, $v_2 \in ker(A-\lambda I)^2$, ..., $v_n \in ker(A-\lambda I)^n$.

Finalmente la solución va a estar determinada por:

$$\vec{x}(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2(v_2 + v_1 t)e^{\lambda t} + \cdots + c_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} v_{n-i} \frac{t^i}{i!} \right) e^{\lambda t}$$

Con este último resultado se puede obtener la solución para una matriz de cualquier orden y con cualquier número de vectores defectuosos.

Nota: En el desarrollo de este reumen se omitieron varios pasos y se escribió lo más importante. Ante cualquier duda sobre la resolució u obtención de algún resultado, contactar al ayudante.

Ejercicios

1. Ejemplo. Resolver el sistema:

$$y_1' + 2y_1 + 2y_2' + 3y_2 = 0$$
$$y_1' - y_2' + 2y_1 = 0$$

Solución

Reescribimos el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & -2y_1 - y_2 \\ y_2' & = & -y_2 \end{array}$$

Ahora, lo escribimos en forma matricial:

$$\vec{y}' = \overbrace{\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \vec{y}$$

Es evidente que los valores propios de A son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$.

Buscamos el vector propio asociado a $\lambda_1 = -2$:

$$\rightarrow \quad ker(A + 2 \cdot I) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El procedimiento para encontrar el vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$ es análogo al anterior:

$$\rightarrow \quad ker(A + I) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente la solución es:

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

2. P2 I3-1sem-2007. Considere el siguiente sistema masa-resorte:

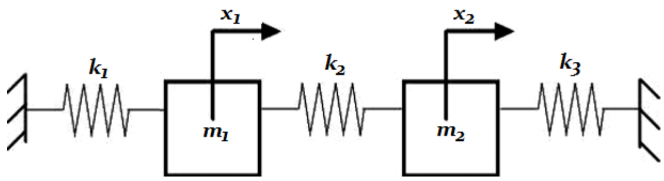


Figura 1: Sistema Masa-Resorte Problema 2

con $m_1 = 1/2\,[kg]$, $m_2 = 2\,[kg]$, $k_1 = 2\,[N/m]$, $k_2 = 1\,[N/m]$ y $k_3 = 3\,[N/m]$. Escriba el sistema de ecuaciones de movimiento de las masas m_1 y m_2, y encuentre su solución general.

Solución

Primero escribimos las ecuaciones de movimiento:

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$
$$m_2 x_2'' = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

Reemplazamos los valores:

$$\begin{aligned} x_1'' &= -6x_1 + 2x_2 \\ x_2'' &= 1/2 x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Escribimos lo anterior en forma matricial:

$$\vec{x}'' = \overbrace{\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 1/2 & -2 \end{bmatrix}}^{A} \vec{x}$$

La idea es desacoplar el sistema, esto es escribir la matriz A como una matriz diagonal D. Para eso, intentamos diagonalizar la matriz A, ocupando $A = VDV^{-1}$ y luego haciendo un cambio de variable $\vec{x} = V\vec{y}$. Comenzamos buscando los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 + 8\lambda + 11 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{5}$$

Vectores propios:

$$\rightarrow \quad ker(A - (-4 + \sqrt{5}) \cdot I) = \begin{bmatrix} -2 - \sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \qquad \therefore\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces, vamos a tener que:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2+\sqrt{5}}{2} & \frac{2-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} -4+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -4-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Hacemos el cambio de variable y tenemos:

$$\vec{y}'' = \begin{bmatrix} -4+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -4-\sqrt{5} \end{bmatrix} \vec{y}$$

Desacoplamos el sistema, por lo tanto, podemos resolver cada ecuación en forma intependiente:

$$\begin{aligned} y_1'' &= -(4-\sqrt{5})y_1 \\ y_2'' &= -(4+\sqrt{5})y_2 \end{aligned}$$

Resolvemos ocupando el operador D:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cos\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\,t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\,t\right) \\ y_2 &= c_3 \cos\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\,t\right) + c_4 \sin\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\,t\right) \end{aligned}$$

Ahora, volvemos del cambio de variable:

$$\vec{x}(t) = V\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2+\sqrt{5}}{2} & \frac{2-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \cos\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\,t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\,t\right) \\ c_3 \cos\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\,t\right) + c_4 \sin\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\,t\right) \end{bmatrix}$$

Finalmente la solución general es:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \cos\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\,t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\,t\right) + c_3 \cos\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\,t\right) + c_4 \sin\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\,t\right) \\ \frac{2+\sqrt{5}}{2}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\,t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\,t\right)\right) + \frac{2-\sqrt{5}}{2}\left(c_3 \cos\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\,t\right) + c_4 \sin\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\,t\right)\right) \end{bmatrix}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
23 de Mayo de 2011

Ayudantía N° 12 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

MATRIZ FUNDAMENTAL Y MATRIZ EXPONENCIAL

Resumen

Matriz Fundamental

Por ahora, sabemos que la solución de un sistema matricial $X' = AX$ de $n \times n$ es de la forma:

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \cdots + c_{n-1}\vec{x}_{n-1}(t) + c_n\vec{x}_n(t)$$

Hemos visto anteriormente que el i-ésimo término es:

$$\vec{x}_i(t) = \vec{v}_i(t)e^{\lambda_i t}$$

Donde $\vec{v}_i(t)$ es el vector propio asociado al valor propio λ_i. El vector propio $\vec{v}_i(t)$ depende de t, en el caso en que el vector sea generalizado.

Entonces, a partir de lo anterior podemos escribir la solución general de la siguiente forma:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{c}$$

Donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental asociada al sistema. Cabe destacar que una matriz fundamental tiene rango máximo, debido a que contiene como columnas n soluciones linealmente independientes entre sí. Además, es fácil apreciar que una matriz funamental no es única, ya que puede variar dependiendo de la elección de cada vector propio asociado a cada valor propio.

Para determinar $\vec{c}$ en la ecuación anterior, ocupamos las condiciones iniciales:

$$\vec{c} = \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad \rightarrow \quad \vec{x}(0) = \Phi(0)\vec{c} \quad \rightarrow \quad \vec{c} = \Phi(0)^{-1}\vec{x}_0$$

Finalmente podemos reescribir la solución de la siguiente forma:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\vec{x}_0$$

Matriz Exponencial

Una forma de encontrar la matriz exponencial es ocupando la expansión de Taylor para la función e^{At} de la misma forma que lo haríamos para e^{t}. Es decir, tendríamos que:

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots + \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

Esta forma, es el cálculo de la matriz exponencial por definición. Conviene ocupar este método cuando la matriz A es nilpotente, o se puede descomponer como la identidad más una matriz nilpotente. Que una matriz A de $n \times n$ sea nilpotente, significa que para alguna potencia se puede obtener la matriz nula, es decir:

$$A^k = 0$$

donde $k \in [1, +\infty)$. Además, si A es nilpotente $|A| = 0$, ya que A^k es la matriz nula.

Por otro lado, la utilidad de esta matriz es que es una solución al problema $X' = AX$:

$$\frac{d\,e^{At}}{dt} = \sum_{n=1}^{+\infty} A\frac{(At)^{n-1}}{(n-1)!} = A\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(At)^n}{n!} = Ae^{At}$$

Que sea solución del problema anterior significa que la matriz exponencial es una matriz fundamental. En particular, la exponencial del sistema: $e^{At} = \Phi(t)$, es una matriz fundamental que satisface $\Phi(0) = I$. Entonces, el sistema estudiado tendría una solución de la siguiente forma:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0$$

De donde se puede apreciar que el la exponencial del sistema es:

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$$

Finalmente, podemos apreciar que para calcular la exponencial de un sistema tenemos 2 formas de obtenerlas. i) Por definición, y ii) Cálculo de $\Phi(t)\Phi(0)^{-1}$.

Ejercicios

1. P1 I3-1sem-2007. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 + 3x_3 \\ x_2' &= -2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_3' &= -2x_1 - x_2 + 5x_3 \end{aligned}$$

a) Determine una matriz fundamental para este sistema.
b) Halle la matriz exponencial asociada al sistema.
c) Resuelva el sistema para las siguientes condiciones iniciales: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ y $x_3(0) = 0$.

Solución

a) Primero determinamos la matriz asociada al sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculamos los valores propios asociados a la matriz:

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\lambda = 2}$$

Ahora, los vectores propios asociados:

$$\ker(A - 2I_3) \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Debemos buscar un vector propio generalizado, ya que sólo tenemos 2 vectores propios asociados a un valor propio de multiplicidad 3.

$$\ker(A - 2I_3)^2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elegimos arbitrariamente el siguiente vector perteneciente al ker anterior:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Recalculamos el vector v_2, ya que v_3 es generalizado:

$$v_2 = (A - 2I_3)v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

v_1 L.I. con v_2.

Calculamos una matriz fundamental:

$$\Phi(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3t \\ -2 & 3 & 3t \\ 0 & 3 & 1+3t \end{bmatrix}$$

b) Calculamos la matriz exponencial de la siguiente forma:

$$e^{At} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}$$

Calculamos $\Phi(0)^{-1}$ ocupando:

$$\Phi(0)^{-1} = \frac{1}{|\Phi(0)|} \cdot Adj[\Phi(0)]$$

Tenemos que:

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$|\Phi(0)| = 9$$

$$Adj[\Phi(0)] = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\Phi(0)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$e^{At} = \frac{e^{2t}}{9}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3t \\ -2 & 3 & 3t \\ 0 & 3 & 1+3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{2t} & -te^{2t} & 3te^{2t} \\ -2te^{2t} & (1-t)e^{2t} & 3te^{2t} \\ -2te^{2t} & -te^{2t} & (1+3t)e^{2t} \end{bmatrix}$$

c) Calculamos las constantes:

$$\vec{c} = \Phi(0)^{-1} \cdot \vec{x_0}$$

$$\vec{c} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \vec{x}(t) = \frac{6}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} - \frac{3}{9}\begin{pmatrix} 3t \\ 3t \\ 1+3t \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ -1-t \\ -t \end{pmatrix} e^{2t}$$

2. Matriz Exponencial. Sea:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Calcular e^{At} que soluciona la ecuación $X' = AX$.

Solución

Para resolver el problema se puede hacer un procedimiento análogo al del ejercicio 1, pero en este caso vamos a calcular la matriz exponencial por definición.

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

Algunas veces es mejor encontrar la matriz exponencial de esta forma, ya que es más rápido. En este caso, tenemos que A es una matriz triangular superior que se puede reescribir de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = aI_3 + B$$

La idea de escribir A así es que la matriz B sea nilpotente. Claramente B lo es.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora debemos encontrar A^n:

$$A^n = (aI_3 + B)^n = \binom{n}{0} a^n I_3 + \binom{n}{1} a^{n-1} I_3 B + \binom{n}{0} a^{n-2} I_3 B^2$$

$$\rightarrow \quad A^n = a^n I_3 + na^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} B^2$$

Reemplazamos lo obtenido en la definición de matriz exponencial:

$$e^{At} = I_3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(at)^n}{n!} + Bt \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(at)^{n-1}}{n!} + \frac{B^2 t^2}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)(at)^{n-2}}{n!}$$

$$\rightarrow \quad e^{At} = e^{at} I_3 + e^{at} Bt + e^{at} \frac{B^2 t^2}{2} = e^{at} \left(I_3 + Bt + \frac{B^2 t^2}{2} \right)$$

Finalmente:

$$e^{At} = e^{at} \begin{bmatrix} 1 & bt & ct + \frac{b^2 t^2}{2} \\ 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
`fnyanez@uc.cl`
30 de Mayo de 2011

Ayudantía Nº 13 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEOS

Resumen

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales No Homogéneos

El método de solución para este tipo de problemas es mediante variación de parámetros, por lo tanto, a partir de la solución homogénea encontramos la solución particular. Entonces, si tenemos el siguiente sistema:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

La solución homogénea va a estar dada por:

$$\vec{x}_H(t) = \Phi(t)\vec{c}$$

Entonces, la solución particular la buscamos ocupando un vector $\vec{u}(t)$ que depende de t:

$$\vec{x}_P(t) = \Phi(t)\vec{u}(t)$$

Reemplazamos la solución particular en la sistema no homogéneo:

$$\Phi'(t)\vec{u}(t) + \Phi(t)\vec{u}'(t) = A\Phi(t)\vec{u}(t) + \vec{b}(t)$$

Reordenamos lo anterior:

$$\underbrace{\left[\Phi'(t) + A\Phi(t)\right]}_{\clubsuit}\vec{u}(t) + \Phi(t)\vec{u}'(t) = \vec{b}(t)$$

donde $\clubsuit$ es cero ya que $\Phi(t)$ es solución de la ecuación homogénea. Por lo tanto, tenemos:

$$\Phi(t)\vec{u}'(t) = \vec{b}(t)$$

Despejamos $\vec{u}'(t)$ recordando que las matrices fundamentales son de rango máximo:

$$\vec{u}'(t) = \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t)$$

Para encontrar $\vec{u}(t)$ integramos término a término:

$$\vec{u}(t) = \int_0^t \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\, d\tau$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$\vec{x}_P(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\, d\tau$$

Recordamos que la solución general es de la siguiente forma:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_H(t) + \vec{x}_P(t)$$

Por lo tanto, vamos a tener:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{c} + \Phi(t)\int_0^t \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\, d\tau$$

Ahora, si ocupamos la exponencial del sistema como matriz fundamental, recordando que la matriz $e^{At} = \Phi(t)$ es una matriz fundamental que satisface $\Phi(0) = I$, vamos a tener:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\, d\tau$$

Donde la utilidad de lo anterior es la facilidad del cálculo de matrices inversas. Por lo tanto, para este tipo de ejercicios, el problema se reduce a encontrar la exponencial del sistema y luego aplicar el último resultado encontrado.

Ejercicios

1. P3 I3-1sem-2007. Resolver:

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y + 7 \\ y' &= 9x - 3y + 5 \end{aligned}$$

con las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = 3$ e $y(0) = 5$.

Solución

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ahora, comenzamos buscando la matriz fundamental, para eso calculamos primero los valores propios de A, recordando que para matrices de 2×2 el polinomio característico es de la forma:

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = 0$$

donde $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ y $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. En este caso tenemos que $Tr(A) = det(A) = 0$, lo que significa que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ahora, buscamos los vectores propios asociados a los valores propios:

$$\rightarrow \quad ker(A - 0 \cdot I_2) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tenemos un sólo vector propio asociado a 2 valores propios, por lo tanto, debemos buscar un vector propio generalizado:

$$\rightarrow \quad ker(A - 0 \cdot I_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos elegir cualquiera de los 2 vectores canónicos (e_1 o e_2). En este caso, elegimos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como tenemos un vector propio generalizado, debemos recalcular el primer vector propio. El vector v_1 debe cumplir:

$$(A - 0 \cdot I_2)v_2 = v_1 \quad \to \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ahora, escribimos una matriz fundamental del sistema:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -1 & -t \\ -3 & 1 - 3t \end{bmatrix}$$

Buscamos la exponencial del sistema, por lo tanto:

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \Phi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -t \\ -3 & 1 - 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3t & -t \\ 9t & 1 - 3t \end{bmatrix}$$

Calculamos la solución homogénea[1]:

$$\vec{x}_H(t) = e^{At}\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 + 3t & -t \\ 9t & 1 - 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t + 3 \\ 12t + 5 \end{bmatrix}$$

Ahora la solución particular:

$$\vec{x}_P(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\, d\tau$$

$$e^{-At}\vec{b}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 3t & t \\ -9t & 1 + 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 16t \\ 5 - 48t \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\, d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} 7 - 16\tau \\ 5 - 48\tau \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 7t - 8t^2 \\ 5t - 24t^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_P(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\, d\tau = \begin{bmatrix} 1 + 3t & -t \\ 9t & 1 - 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7t - 8t^2 \\ 5t - 24t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7t + 8t^2 \\ 5t + 24t^2 \end{bmatrix}$$

Finalmente la solución es:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_H(t) + \vec{x}_P(t) = \begin{bmatrix} 4t + 3 \\ 12t + 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7t + 8t^2 \\ 5t + 24t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 11t + 8t^2 \\ 5 + 17t + 24t^2 \end{bmatrix}$$

[1] Propuesto: Demuestre por qué se puede calcular la solución homogénea antes de obtener la solución general.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
`fnyanez@uc.cl`
6 de Junio de 2011

Ayudantía Nº 14 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Resumen

Transformada de Laplace

Para una función $f(t)$, se define su LT de la siguiente forma:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

donde s es un número complejo $s = \sigma + i2\pi u$, pero para efectos de este curso s se puede considerar como un número real.

Por otro lado, cada Transformada de Laplace, $F(s)$, de una función $f(t)$ tiene asociada una región de convergencia donde $F(s)$ está bien definida. Esta región es importante, pero en este curso no es necesario tenerla en cuenta y por eso, no se va a entrar en detalle sobre ese tema.

Teorema de la Convolución

Ahora, para 2 funciones $f(t)$ y $g(t)$, se define la convolución de la siguiente forma:

$$\{f * g\}(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Una forma de entender el significado de la convolución es considerandola como el grado de superposición de las funciones $f(t)$ y $g(t)$.

Por otro lado, un resultado importante que se puede inferir es el siguiente:

$$f(t) * g(t) = F(s)G(s)$$

Entonces, en algunas ocaciones es mejor ocupar la Transformada de Laplace para ahorrarnos la integración (convolución) y trabajar sólo con una multiplicación (Laplce), donde posteriormente hay que calcular su transformada inversa para volver al espacio del tiempo.

Tabla de Transformadas de Laplace

A continuación se presenta una tabla con las Transformadas de Laplace más ultilizadas.

$f(t)$	$F(s)$
c	$\frac{c}{s} \qquad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad s > 0,\ \forall n$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \qquad s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \qquad s > \text{máx}\{0, a\},\ \forall n$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2} \qquad s > 0$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2} \qquad s > 0$
$t\cos(bt)$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2} \qquad s > 0$
$t\sin(bt)$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2} \qquad s > 0$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \qquad s > \text{máx}\{0, a\}$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \qquad s > \text{máx}\{0, a\}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2} \qquad s > \lvert b\rvert$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2} \qquad s > \lvert b\rvert$
$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s} \qquad s > 0,\ a \geq 0$
$\delta(t)$	$1 \qquad \forall s$
$\delta'(t)$	$s \qquad \forall s$

Propiedades de la Transformadas de Laplace

Ahora mostramos algunas propiedades básicas.

$f(t)$	$F(s)$
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F(s/a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - [f^{(n-1)}(0) + \cdots + s^{n-1} f(0)]$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as} F(s)$

Ejercicios

1. P4 a) I3-1sem-2007. Resuelva el siguiente problema ocupando la Transformada de Laplace:

$$y''' - y'' - 2y' = e^{-t}$$

con las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ y $y''(0) = 2$.

2. P4 b) I3-1sem-2007. Calcular la Transformada de Laplace de $x(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

3. Demostración. Mostrar que la LT de $f(t) = t^n$ con $n \in \mathbb{R}^+$ es $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

4. Sistema. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + \cos(t) \\ y' &= 2x + y + \sin(t) \end{aligned}$$

con las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$.

Problema

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Calcular e^{At} que soluciona $\vec{X}' = AX$.

$\boxed{\text{Solución 1}}$

$$A = a \cdot I + B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B^3 = 0$

donde:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad ¿A^n? \longrightarrow A^n = (aI + B)^n \quad \forall n$$

$$* \quad (aI + B)^n = \binom{n}{0} a^n I + \binom{n}{1} a^{n-1} I \cdot B + \binom{n}{2} a^{n-2} I B^2 + 0 \ldots$$

$$A^n = a^n I + n a^{n-1} B + \frac{(n-1)n}{2} a^{n-2} \cdot B^2$$

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n t^n I}{n!} + \frac{n a^{n-1} t^{n-1}}{n!} Bt + \frac{(n-1)n (ta)^{n-2}}{n!} \frac{B^2 t^2}{2} \right)$$

$$= e^{at} \left(I + B + \frac{B^2}{2} \right)$$

$$\rightarrow e^{At} = e^{at} \begin{bmatrix} 1 & bt & ct + \frac{b^2t^2}{2} \\ 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución 2

$$e^{At} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}.$$

$$\Phi(t) = \left[v_1 e^{\lambda_1 t} \quad v_2 e^{\lambda_2 t} \quad \dots \right]$$

Val. Prop.

$$|A - \lambda I| = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a$$

Vect. prop.

$\lambda = a$

$$B \to \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad v_1 = \begin{pmatrix} b^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ No!} \quad \therefore v_2 = \begin{pmatrix} c \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \Phi(t) = e^{at} \begin{bmatrix} b^2 & c + b^2 t & ct + \frac{b^2 t^2}{2} \\ 0 & b & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Phi(0) = \begin{bmatrix} b^2 & c & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{cof} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ c & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 \end{bmatrix} \to \Phi(0)^{-1} = \frac{1}{b^3} \begin{bmatrix} b & -c & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 \end{bmatrix} \qquad \Phi(0)^{-1} = \frac{1}{|\Phi(0)|} \cdot \text{Adj}(\Phi(0))$$

$$\to \exp(At) = \frac{e^{at}}{b^3} \begin{bmatrix} b^2 & c + b^2 t & ct + \frac{b^2 t^2}{2} \\ 0 & b & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -c & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{e^{at}}{b^3} \begin{bmatrix} b^3 & b^4 t & b^3 ct + \frac{b^5 t^2}{2} \\ 0 & b^3 & b^4 t \\ 0 & 0 & b^3 \end{bmatrix}$$

$$= e^{at} \begin{bmatrix} 1 & bt & ct + \frac{b^2 t^2}{2} \\ 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

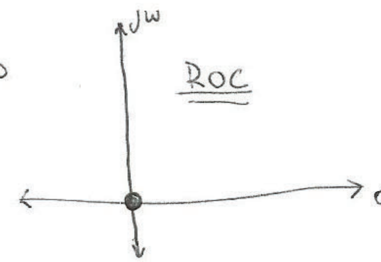
límites

LAPLACE:

→ Definición: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\, dt$

$s = \sigma + j\omega$

Importante: ROC



* Ejemplo 1.1: LT ~~es~~ lineal. Homogeneidad y superposición.

$f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$

$\rightarrow F(s) = \int_0^\infty \{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} e^{-st} dt = \alpha \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt$

* Ejemplo 1.2: Calcular LT de una constante.

$f(t) = K \quad \rightarrow \quad F(s) = K \int_0^\infty e^{-st} dt = K \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty = \frac{K}{s}$

¿Ahora, antitransformada?

No se ve en este curso.

Un poco de formalidad: $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad \alpha < Re\{s\} < \beta$

$s = \sigma + i 2\pi\mu$

$f(t) = \frac{1}{i2\pi} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} F(s) \cdot e^{st} ds \qquad c \in$ ROC de $F(s)$

(1) $y'' - 5y' + 6y = 1$ . . . $y(0) = +1$

$y'(0) = 0$

$y'' \longrightarrow s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$

$y' \longrightarrow s\,Y(s) - y(0)$

$y \longrightarrow Y(s)$

$1 \longrightarrow \frac{1}{s}$

$$\left(s^2 Y(s) - s\right) - 5\left(s\,Y(s) - 1\right) + 6\,Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\left(s^2 - 5s + 6\right) Y(s) - (s - 5) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-2)(s+3)} + \frac{s-5}{(s-2)(s-3)}$$

$$\downarrow$$

$$1 = A(s-2)(s-3) + B(s)(s-3) + C(s)(s-2)$$

$$\frac{3}{s-2} - \frac{2}{s-3}$$

$A = 1/6$

$B = -1/2$

$C = 1/3$

$$\longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{-1/2}{s-2} + \frac{1/3}{s-3} + \frac{3}{s-2} + \frac{-2}{s-3}$$

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{5/2}{s-2} + \frac{-5/3}{s-3}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{6} + \frac{5}{2} e^{2t} - \frac{5}{3} e^{3t}}$$

ROC
$s > 3$

Problema:

Calcular la LT de:

a) $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{R}^+$. b) $\frac{\sin t}{t}$

Solución:

a) $F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$

$\rightarrow \quad F(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\, dt$ c.v. $u = st$

$du = s \cdot dt$

$F(s) = \int_0^\infty \frac{u^n}{s^n} \cdot e^{-u} \cdot \frac{du}{s}$

$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^{(n+1)-1}\, e^{-u}\, du$

Función Gamma: $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt$

Recurrencia:

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)$

$\dots\ n!\,\Gamma(1) = n!$

$\therefore \quad F(s) = \frac{1}{s^{n+1}} \cdot \Gamma(n+1)$

$\longrightarrow \quad F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1640 - Ecuaciones Diferenciales

Felipe Yáñez Lang
fnyanez@uc.cl
20 de Junio de 2011

Ayudantía Nº 16 - Ecuaciones Diferenciales (Sec. 5)

TEORÍA CUALITATIVA

Resumen

Linealización

En esta parte del curso vamos a estudiar la linealización de sistemas, para poder determinar cualitativamente su comportamiento. En general, los sistemas van a ser de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y)\end{aligned}$$

Donde lo primero que debemos hacer es encontrar los puntos de operación en los cuales se va a a efectuar la linealización. Es decir, debemos encontrar los puntos de equilibrio del sistema:

$$\begin{aligned}f(x,y) &= 0\\ g(x,y) &= 0\end{aligned}$$

A continuación planteamos las expaniones de Taylor de primer orden de $f(x,y)$ y $g(x,y)$:

$$\begin{aligned}x' &= f(x_0,y_0) + \frac{d}{dx}f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{d}{dy}f(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\\ y' &= g(x_0,y_0) + \frac{d}{dx}g(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{d}{dy}g(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow\quad x' &= f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\\ \rightarrow\quad y' &= g_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\end{aligned}$$

Planteamos el problema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{\clubsuit} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Donde $\clubsuit$ es la matriz Jacobiana asociada, $J(f,g)(x_0,y_0)$. Luego, las soluciones del sistema linealizado van a ser de la siguiente forma:

$$\vec{x}(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

Donde el resultado anterior es válido sí y sólo sí se cumplen las condiciones del Teorema de Hartman-Grobman.

Teorema de Hartman Grobman[1]

Sea (E) un sistema no-lineal, con f y g curvas lo suficientemente suaves,

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \qquad (E) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

Supongamos que (x_0,y_0) es un punto de equilibrio del sistema y que $J(f,g)(x_0,y_0)$ no tiene autovalores puramente imaginarios. Entonces, existe un homeomorfismo h definido en U, entorno a (x_0,y_0), $h :\to \mathbb{R}^2$ que lleva las trayectorias del sistema no-lineal sobre las del sistema linealizado.

Generalización de Resultados

Ahora, presentamos una tabla dependiendo de los autovalores encontrados. Definimos $\lambda_1 = a_1 + ib$ y $\lambda_2 = a_2 + ib$. Cabe destacar que cuando $b \neq 0$, $a_1 = a_2$ ya que son autovalores complejos conjugados.

a_1	a_2	b	Característica del punto de equilibrio
$(+)$	$(+)$	$\neq 0$	Repulsor Espiral
$(+)$	$(+)$	0	Repulsor NO Espiral
$(-)$	$(-)$	$\neq 0$	Atractor Espiral
$(-)$	$(-)$	0	Atractor NO Espiral
$(+)$	$(-)$	0	Punto Silla
$(-)$	$(+)$	0	Punto Silla
0	0	$\neq 0$	No se puede afirmar (no cumple H-G)

Además, debemos recordar que la estabilidad del sistema para un punto de equilibrio ocurre cuando $Re\{\lambda_i\} < 0 \, \forall i$, mientras que para la inestabilidad sólo se requiere que exista algún autovalor mayor que cero.

[1]En otras palabras, el teorema dice que para que el sistema lineal se comporte como el sistema no-lineal sólo se debe cumplir que los autovalores asociados no sean imaginarios puros. En en caso que lo sean, no podemos afirmar nada.

Ejercicios

1. Linealizar en torno a cada uno de sus puntos de equilibrio, el siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
x' &= x(7 - x - 2y)\\
y' &= y(5 - x - y)
\end{aligned}
$$

Luego, en base a a cada linealización estudie la estabilidad del sistema.

Solución

Lo primero que debemos hacer es buscar los puntos de equilibrio. Además, apreciando la forma del sistema, sabemos que los puntos de equilibrio son cuatro. Recordamos que los puntos de equilibrio son los que resuelven lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 0\\
g(x,y) &= 0
\end{aligned}
$$

Para lo anterior simplemente debemos ver los casos cuando:

$$
\begin{array}{ll}
x = 0 & y = 0\\
x \neq 0 & y = 0\\
x = 0 & y \neq 0\\
x \neq 0 & y \neq 0
\end{array}
$$

Es claro que los puntos de equilibrio son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= (0,0)\\
P_1 &= (7,0)\\
P_2 &= (0,5)\\
P_3 &= (3,2)
\end{aligned}
$$

Calculamos la matriz Jacobiana:

$$
J(f,g)(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y)\\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 2x - 2y & -2x\\ -y & 5 - x - 2y \end{pmatrix}
$$

Reemplazamos los puntos de equilibrio en la matriz:

P_0 :

$$J(f,g)(0,0) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Donde los autovalores son: $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = 5$. Como ambos autovalores son reales y mayores que cero, se cumple el teorema de Hartman Grobman y concluímos que el sistema es **estable (atractor no espiral)** en P_0.

P_1 :

$$J(f,g)(7,0) = \begin{pmatrix} -7 & -14 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso, los autovalores son: $\lambda_1 = -7$ y $\lambda_2 = -2$. Como ambos autovalores son reales y menores que cero, se cumple el teorema de Hartman Grobman y concluímos que el sistema es **estable (atractor no espiral)** en P_1.

P_2 :

$$J(f,g)(0,5) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son: $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -5$. Como ambos autovalores son reales y menores que cero, se cumple el teorema de Hartman Grobman y concluímos que el sistema es **estable (atractor no espiral)** en P_2.

P_3 :

$$J(f,g)(3,2) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores sabiendo que: $Tr(J) = -5$ y $det(J) = -6$. Esto significa que los autovalores son: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -6$. Como ambos autovalores son reales, se cumple el teorema de Hartman Grobman y concluímos que el sistema es **inestable (punto silla)** en P_2, debido a que un autovalor es positivo y el otro negativo.

2. Considere la familia de sistemas lineales:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \vec{x}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

Primero, determine para qué valores de a el sistema tiene un solo punto de equilibrio. Luego, clasifique el sistema, dependiendo de los distintos valores de a.

Solución

Primero vemos de qué forma son los autovalores asociados. Definimos la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

Donde tenemos que:

$$Tr(A) = 2a \quad y \quad det(A) = a^2 - a$$

Por lo tanto, los autovalores de A son:

$$\lambda_1 = a + \sqrt{a} \quad y \quad \lambda_2 = a - \sqrt{a}$$

Entonces, para determinar sólo un punto de equilibrio (el origen), se debe cumplir que no haya un auto valor nulo. Esto se debe a que si tenemos un autovalor nulo, en el infinito la solución va a tender al vector asociado a ese autovalor nulo y no al origen, por lo tanto, tendríamos más de un punto de equilibrio, lo que contradice el enunciado. En el caso de que tengamos autovalores positivos, la solución diverge y en el caso que sean negativos, la solución tiende a cero (origen), es decir, si no hay autovalores nulos se cumple lo pedido.

Claramente los autovalores nulos son cuando: $a = 0$ y $a = 1$. Por lo tanto, vamos a analizar los puntos de equilibrio en los casos en que a pertenece a cada uno de esos tres intervalos:

$\underline{a < 0:}$

En este caso, vamos a tener autovalores de la siguiente forma:

$$\lambda_1 = -|a| + i\sqrt{|a|} \quad y \quad \lambda_2 = -|a| - i\sqrt{|a|}$$

Los dos autovalores son complejos conjugados, donde $Re\{a\} < 0$. Es decir, es estable (atractor espiral).

<u>$0 < a < 1$:</u>

En este intervalo, los autovalores cumplen lo siguiente:

$$a - \sqrt{a} < 0 < a + \sqrt{a}$$

$$\rightarrow \quad \lambda_1 > 0 \quad y \quad \lambda_2 < 0$$

Tenemos un autovalor positivo y uno negativo, por lo tanto, es inestable (punto silla).

<u>$a > 1$:</u>

Finalmente tenemos que los autovalores cumplen:

$$0 < a - \sqrt{a} < a + \sqrt{a}$$

$$\rightarrow \quad \lambda_1 > 0 \quad y \quad \lambda_2 < 0$$

Es decir, ambos autovalores son positivos, por lo tanto, es inestable (repulsor no espiral).

<u>Nota:</u>

No están los demás ejercicios, porque eran de funciones de Lyapunov y no entran en el examen.

Felipe Yáñez L.

Problema 4

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 y \\ y^5 \end{pmatrix}$$

<u>Observación:</u> El punto $(0,0)$ es un punto de equilibrio del sistema, independiente del valos de α. Esto es verificación trivial del problema.

El sistema linealizado en torno a $(0,0)$ es:

$$\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\varphi} \cdot \vec{y}(t)$$

Analizamos los autovalores de la matriz φ.

$$\rightarrow \quad det(\varphi - \lambda I_{2\times 2}) = \lambda^2 + \lambda + \alpha$$

$$\Delta = 1 - 4\alpha$$

Ahora vemos los distintos casos:

Caso 1

Si $\alpha \in (-\infty, 0) \bigcup (0, 1/4]$ ie

$$1 - 4\alpha \geq 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2}\, son\, reales$$

Sub-Caso 1a

Si $\alpha \in (-\infty, 0)$ ie

$$1 - 4\alpha > 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 > 0\, y\, \lambda_2 < 0$$

Por lo tanto, $(0,0)$ es un punto silla(inestable) para el sistema lineal y el no lineal.

Sub-Caso 1b

Si $\alpha \in (0, 1/4]$ ie

$$0 \leq 1 - 4\alpha < 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} < 0$$

Por lo tanto, $(0,0)$ es un punto asintóticamente estable para el sistema lineal y el no lineal.

Caso 2

Si $\alpha \in (0, \infty)$ ie

$$1 - 4\alpha < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2}\, son\, complejos\, conjugados$$

donde

$$\Re\{\lambda_{1,2}\} < 0$$

Por lo tanto, $(0, 0)$ es un punto asintóticamente estable para el sistema lineal y el no lineal.